BEITRÄGE ZUR MATHEMATISCHEN LOGIK

Zeichensequenzen, das kennzeichnende Prädikat von Individuenausdrücken, Präsuppositionsfunktionen in der 3-wertigen Semantik, konjunktive und disjunktive Normalmengen.

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades der Philosophie
an der Ludwig-Maximilians-Universität
zu München

vorgelegt von
Hans Kugler
aus Eggenfelden

Druck: D. Gräbner, Altendorf

1979

BEITRÄGE ZUR MATHEMATISCHEN LOGIK

Zeichensequenzen, das kennzeichnende Prädikat von Individuenausdrücken, Präsuppositionsfunktionen in der 3-wertigen Semantik, konjunktive und disjunktive Normalmengen.

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades der Philosophie
an der Ludwig-Maximilians-Universität
zu München

vorgelegt von
Hans Kugler
aus Eggenfelden

Druck: D. Gräbner, Altendorf

1979

Referent:	Prof.M.Käsbauer
Korreferenten:	Prof.P.Hinst,Prof.W.Hoering

Tag der mündlichen Prüfung: 17.7.79

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Für alle meine Eltern:

meinen Vater,meine Mutter,
meinen wahrhaftigen Doktorvater Prof.Max Käsbauer,
meine Mami,Dr.Vater,
Mutter Erde und Vater Himmel.

Zusammenfassung:

Nach einigen mathematischen Vorbemerkungen definieren wir Z-Sequenzen als endliche Folgen von Elementen einer Menge Z. Wir betrachten einige für diesen Begriff wichtige Relationen und Operationen wie: Sequenzstück von , Teilsequenz von, Verkettung von Sequenzen und Substitution von Sequenzstücken einer Sequenz durch andere Sequenzen.
Wir benötigen dies,wenn wir in der Syntax der anschließend definierten Sprache $\mathbb{L}$ die Ausdrücke von $\mathbb{L}$ als spezielle Sequenzen von Grundzeichen einführen.
$\mathbb{L}$ ist eine prädikatenlogische Sprache erster Stufe mit Identität und Kennzeichnung.
Um aus den syntaktisch zulässigen Individuenausdrücken die semantisch sinnvollen auszusondern,ordnen wir jedem n-stelligen Individuenausdruck einen n-stelligen Prädikatausdruck zu, den wir dessen kennzeichnendes Prädikat nennen.Wir betrachten einen Individuenausdruck bei einer Interpretation genau dann als semantisch sinnvoll,wenn die Extension seines kennzeichnenden Prädikats bei dieser Interpretation einelementig ist.
Dies spiegelt sich in der von uns angegebenen Interpretations- und Bewertungssemantik wider.
Danach zeigen wir ein Verfahren,das es erlaubt,3-wertige Semantiken in enger Verbindung zur 2-wertigen Semantik zu konstruieren.Dies geschieht mifhilfe sogenannter Präsuppositionsfunktionen.Wir werden sehen,daß jede Präsuppositionsfunktion einen 3-wertigen Bewertungsbegriff induziert und damit 3-wertige Begriffe der logischen Wahrheit und Folgerung ,die in apriori determinierter Beziehung zu den 2-wertigen Begriffen stehen.Ein sehr einfaches Korrespondenztheorem beschreibt diese Beziehung.Zum Abschluß dieses Kapitels geben wir vier Beispiele von Präsuppositionsfunktionen an und untersuchen die von ihnen erzeugten Semantiken.
Der letzte Abschnitt befaßt sich mit einer mengentheoretischen Verallgemeinerung der konjunktiven und disjunktiven Normalformen mit gewissen Vorzügen gegenüber den ursprünglichen Begriffen.Wir definieren rekursiv für jeden Satz einer

Minimalsprache $\mathfrak{L}$ eine konjunktive und eine disjunktive Normalmenge, wie wir diese Entsprechungen nennen, nachdem wir zunächst ihre allgemeinen Eigenschaften dargestellt haben. In den abschließenden Ausführungen über elementweise konsistente Sätze und Teilgehalte betrachten wir zwei Anwendungen unseres Begriffsapparates.

Inhaltsverzeichnis:

		Seite
0.	Mathematische Präliminarien	0
1.	Sequenzen	3
2.	Syntax der Sprache $\mathfrak{L}$	7
3.	Das kennzeichnende Prädikat eines Individuenausdrucks	12
4.	2-wertige Semantik	14
5.	3-wertige Semantik	24
6.	Präsuppositionsfunktionen	29
7.	Syntax und Semantik der Sprache $\mathfrak{L}$	43
8.	Negation und Konsistenz von Satzmengen	44
9.	Konjunktive und disjunktive Normalmengen	46
10.	Elementweise konsistente Sätze	52
11.	Teilgehalte	54

0.MATHEMATISCHE PRÄLIMINARIEN

0.1 Def: Sei M eine Menge und m ein Objekt.
"m e M" besage,daß m ein Element von M ist ,
"m $\notin$ M" die Negation davon.

0.2 Def: Seien M,N Mengen.
"M c N" besage,daß für alle m mit m e M auch m e N,
"M $\notin$ N" die Negation davon.

0.3 Def: "Ø" bezeichne die leere Menge,
" $\mathbb{N}$" die Menge der natürlichen Zahlen 1,2,3,.. ,
" $\mathbb{N}_0$" die Menge der Zahlen 0,1,2,3,.. ,
" $\mathbb{R}$" die Menge der reellen Zahlen.

0.4 Def: Sei $\mathbb{P}(x)$ ein Prädikat derart,daß es eine Menge M gibt mit x e M gdw $\mathbb{P}(x)$,für alle x,
dann bezeichne "$\{ x \mid \mathbb{P}(x) \}$" diese Menge M.

0.5 Def: Seien $m_1,..,m_n$ Objekte , n e $\mathbb{N}$.
Es sei
$\{m_1,..,m_n\} := \{ x \mid x=m_1 \text{ oder } .. \text{ oder } x=m_n \}$

0.6 Def: Sei N eine Menge.
$Pot(N) := \{ M \mid M \text{ c } N \}$,genannt POTENZMENGE VON N.

0.7 Def: Seien M,N Mengen.
$(M-N) := \{x \mid x \text{ e } M \text{ und } x \notin N\}$

0.8 Def: Seien $M_1,..,M_n$ Mengen mit n e $\mathbb{N}$ und $1 \neq n$.

a) $(M_1 u .. u M_n) := \{ x \mid x \text{ e } M_1 \text{ und } .. \text{und } x \text{ e } M_n \}$, genannt DURCHSCHNITT VON M_1UND ..UND M_n .

b) $(M_1 o .. o M_n) := \{ x \mid x \text{ e } M_1 \text{ oder}..\text{oder } x \text{ e } M_n \}$,genannt VEREINIGUNG VON M_1 UND ..UND M_n.

0.9 Def: Sei MM eine Menge von Mengen, MM$\neq$Ø.

a) $U(MM) := \{ x \mid \text{für alle M e MM ist x e M} \}$

b) $O(MM) := \{ x \mid \text{für mindestens ein M e MM ist x e M} \}$

0.10Def: Seien m_1,m_2 Objekte.
$(m_1,m_2) := \{ \{m_1\}, \{m_1,m_2\} \}$,genannt das GEORDNETE PAAR MIT DER ERSTEN KOMPONEMTE m_1 UND DER ZWEITEN KOMPONENTE m_2.

0.11Bem: Seien m_1,m_2,n_1,n_2 Objekte.
$(m_1,m_2)=(n_1,n_2)$ gdw $m_1=n_1$ und $m_2=n_2$.

0.12 Def: Seien M,N,R Mengen.
R heißt eine RELATION ZWISCHEN M UND N gdw
es für alle r e R ein m e M und ein n e N gibt
so,daß r=(m,n) .

0.13 Def: Seien M,R Mengen.
R heißt eine RELATION AUF M gdw
R eine Relation zwischen M und M ist.

0.14 Def: Seien M,N,F Mengen.
a) F heißt eine FUNKTION VON M NACH N gdw
F eine Relation zwischen M und N ist und es
für alle m e M genau ein n e N gibt mit (m,n) e F.
b) Falls F eine Funktion von M nach N ist,bezeichnen
wir für alle m e M dasjenige n e N,für welches
(m,n) e F, mit "F(m)".

0.15 Def: Seien M,N Mengen.
N^M := -(F / F ist eine Funktion von M nach N)-

0.16 Def: Seien M,N,N_0 Mengen mit N_0 c N und sei F e N^M.
a) F heißt INJEKTIV gdw
für alle m_1,m_2eM mit $m_1 \neq m_2$ auch $F(m_1) \neq F(m_2)$
b) F heißt SURJEKTIV BEZÜGLICH N_0 gdw
für alle n e N_0 gibt es mindestens ein m e M mit
(m,n) e F.
c) F heißt BIJEKTIV BEZÜGLICH N_0 gdw
F injektiv ist und surjektiv bezüglich N_0.

0.17 Def: Sei F eine Menge.
F heißt eine FUNKTION gdw
es Mengen M,N gibt so,daß F e N^M.

0.18 Def: Sei F eine Funktion.
Def(F) := -(m / es gibt ein n mit (m,n) e F)-
Bi(F) := -(n / es gibt ein m mit (m,n) e F)-

0.19 Def: Sei F eine Funktion und M c Def(F) .
a) (F/M) := -(x / es gibt ein m e M so,daß x=(m,F(m)))-,
genannt die BESCHRÄNKUNG VON F AUF M
b) (F:M) := Bi((F/M))

0.20 Bem: Sei F eine Funktion und M c Def(F).
Dann ist (F/M) e $(F:M)^M$

0.21 Def: Sei M eine Menge.
M heißt ABZÄHLBAR gdw
es gibt ein $F \in M^{\mathbb{N}}$ so,daß F bezüglich M bijektiv ist.

0.22 Def: Die kleiner-Relation zwischen reellen Zahlen bezeichnen wir durch "$<$" ,
die kleiner-gleich-Relation durch "$\leq$" .

0.23 Def: Sei $M \subset \mathbb{R}$.
a) Falls es ein $m_0 \in M$ gibt so,daß für alle $m \in M$ $m_0 \leq m$, nennen wir m_0 das MINIMUM VON M und bezeichnen es mit "min(M)".
b) Falls es ein $m_0 \in M$ gibt so,daß für alle $m \in M$ $m \leq m_0$, nennen wir es das MAXIMUM VON M und bezeichnen es mit "max(M)" .

0.24 Def: Sei $M \subset \mathbb{R}$ und $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ mit $r_1 \neq r_2$.
$(r_1 \leq M \leq r_2) :\Leftrightarrow \{ x \mid x \in M \text{ und } r_1 \leq x \leq r_2 \}$, genannt M ZWISCHEN r_1 UND r_2 .

0.25 Def: Sei $M \subset \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{R}$.
a) $(M+r) :\Leftrightarrow \{ x \mid \text{es gibt ein } m \in M \text{ so,daß } x=m+r \}$
b) $(M-r) :\Leftrightarrow \{ x \mid \text{es gibt ein } m \in M \text{ so,daß } x=m-r \}$

0.26 Def: Seien $r_1, .., r_n \in \mathbb{R}$ mit $n \in \mathbb{N}$.
a) $\sum_{i=1}^{0} r_i := 0$
b) $\sum_{i=1}^{n} r_i := (r_1 + .. + r_n)$

0.27 Def: Seien $m,n \in \mathbb{N}_0$.
Dann betrachten wir (m,n) als Ordinalzahl.
Die dazugehörige Ordnungsrelation sei folgendermaßen erklärt: Seien $m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{N}_0$.

$(m_1,n_1) < (m_2,n_2)$ gdw $m_1 < m_2$ oder
$m_1 = m_2$ und $n_1 < n_2$

Wir werden diese Ordinalzahlen für transfinite Induktionsbeweise verwenden.

1.SEQUENZEN

Sei Z eine Menge.

1.1 Def: Sei T eine Funktion.
T heißt ein Z-SEQUENZSTÜCK gdw
$Bi(T) \subset Z$ und es $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ gibt mit $n_1 \neq n_2$ so,daß
$Def(T) = (n_1 \neq \mathbb{N} \neq n_2)$.

1.2 Def: Sei T ein Z-Sequenzstück.
a) $'T := \min(Def(T))$
b) $T' := \max(Def(T))$

1.3 Def: Sei T ein Z-Sequenzstück und $z \in Z$.
z KOMMT IN T VOR gdw
$z \in Bi(T)$

1.4 Def: Sei T ein Z-Sequenzstück und seien $n, n_1, n_2 \in Def(T)$
mit $n_1 \neq n_2$.
a) $(n_1 \neq T \neq n_2) := (T/(n_1 \neq \mathbb{N} \neq n_2))$, T ZWISCHEN n_1 UND n_2
b) $(n \neq T) := (n \neq T \neq T')$, T AB n
c) $(T \neq n) := ('T \neq T \neq n)$, T BIS n
d) $(n \not< T) := (T - (T \neq n))$, T HINTER n
e) $(T \not< n) := (T - (n \neq T))$, T VOR n

1.5 Def: Sei T ein Z-Sequenzstück und $n_0 \in \mathbb{N}_0$.
a) $(T+n_0) := \{(n+n_0, T(n)) / n \in Def(T)\}$, oder exakter
$= \{ x \mid$ es gibt ein $n \in Def(T)$ so,daß
$x = (n+n_0, T(n))\}$
b) Falls $n_0 \not< 'T$,sei
$(T-n_0) := \{(n-n_0, T(n)) / n \in Def(T)\} = (T+(-n_0))$

1.6 Bem: Sei T ein Z-Sequenzstück und $n_0 \in \mathbb{N}_0$.
a) Dann ist auch $(T+n_0)$ ein Z-Sequenzstück.
$'(T+n_0) = ('T+n_0)$ und $(T+n_0)' = (T'+n_0)$,
$Def((T+n_0)) = (Def(T)+n_0)$ und
für alle $n \in Def(T)$ ist $T(n) = (T+n_0)(n+n_0)$
b) Falls $n_0 \not< 'T$,
dann ist auch $(T-n_0)$ ein Z-Sequenzstück.
$'(T-n_0) = ('T-n_0)$ und $(T-n_0)' = (T'-n_0)$,
$Def((T-n_0)) = (Def(T)-n_0)$ und
für alle $n \in Def(T)$ ist $T(n) = (T-n_0)(n-n_0)$

1.7 Def: Sei T ein Z-Sequenzstück.
T heißt eine Z-SEQUENZ gdw
'T=1.

1.8 Def: Sei S eine Z-Sequenz, z e Z und n e $\mathbb{N}$.
z KOMMT IN S AN DER STELLE n VOR gdw
(n,z) e S.

1.9 Def: Sei S eine Z-Sequenz, T ein Z-Sequenzstück.
T heißt ein SEQUENZSTÜCK VON S, in Zeichen T st S ,
gdw T c S .

1.10 Def: Seien S_1, S_2 Z-Sequenzen
S_1 heißt eine TEILSEQUENZ VON S_2, in Zeichen S_1 ts S_2,
gdw es ein n_0 e $\mathbb{N}_0$ gibt so, daß (S_1+n_0) st S_2 .

1.11 Def: Seien $z_1,..,z_n$ e Z mit n e $\mathbb{N}$.
Diejenige Sequenz S mit S'=n und $S(i)=z_i$ für $1 \leq i \leq n$
bezeichnen wir mit "(z_n)", falls n=1, und sonst mit
"$(z_1,..,z_n)$".

1.12 Def: Seien $Z_1,..,Z_n \subset Z$.
Die Menge der Sequenzen S mit S'=n und S(i) e Z_i für
$1 \leq i \leq n$ bezeichnen wir mit "(Z_n)", falls n=1, und
sonst mit "$(Z_1 x..x Z_n)$".

1.13 Def: Sei n e $\mathbb{N}$, $Z_0 \subset Z$
Falls n=1, sei $Z_0^n := (Z_0)$
und sonst sei $Z_0^n := (Z_1 x..x Z_n)$ mit $Z_i=Z_0$ für $1 \leq i \leq n$

1.14 Def: Seien $S_1,..,S_n$ Z-Sequenzen mit $2 \leq n$.
$(S_1^\frown..^\frown S_n) := 0\,\{(S_i+\overset{i-1}{\underset{j=1}{\dot{+}}} S_j') \mid 1 \leq i \leq n\}$, genannt
die VERKETTUNG VON S_1 UND ..UND S_n .

1.15 Bem: Seien $S_1,..,S_n$ Z-Sequenzen mit $2 \leq n$.

a) Dann ist auch $(S_1^\frown..^\frown S_n)$ eine Z-Sequenz.

b) $(S_1^\frown..^\frown S_n)' = \overset{n}{\underset{j=1}{\dot{+}}} S_j'$ und

c) für alle $1 \leq i \leq n$ und m e Def(S_i) ist
$S_i(m) = (S_1^\frown..^\frown S_n)(m+\overset{i-1}{\underset{j=1}{\dot{+}}} S_j')$

d) für alle $1 \leq i \leq n$ und für z e Z und m e $\mathbb{N}$ gilt:
z kommt in S_i an der Stelle m vor gdw
z in $(S_1^\frown..^\frown S_n)$ an der Stelle $(m+\overset{i-1}{\underset{j=1}{\dot{+}}} S_j')$ vorkommt .

Im folgenden definieren wir eine Operation, welche es erlaubt, in einer Sequenz eine Teilsequenz durch eine andere Sequenz zu ersetzen.

1.16 Def: Seien S, S_0 Z-Sequenzen und sei T st S_0 .

$$(S_0 \overset{T}{S}) \rightleftharpoons (S_0 \not\angle 'T) \circ (S+('T-1)) \circ ((T' \not\angle S_0)+(S'-(1+T'-'T)))$$

$(S_0 \overset{T}{S})$ besteht aus drei Sequenzstücken.
Es beginnt mit $(S_0 \not\angle 'T)$, also mit S_0 vor 'T .
Anstelle von T kommt dann $(S+('T-1))$, also die Sequenz S, um die ('T-1) Stellen nach rechts verschoben, welche $(S_0 \not\angle 'T)$ einnimmt.
Der dritte Teil ist $((T' \not\angle S_0)+(S'-(1+T'-'T)))$, eine Verschiebung von S_0 hinter T'.T beansprucht in S_0 (1+T'-'T) Stellen, S verfügt über S' Elemente. Die Substitution von T durch S bringt also eine Vermehrung um (S'-(1+T'-'T)) Stellen mit sich, falls $(1+T'-'T) \not\angle S'$; andernfalls eine Verminderung um diese Anzahl. Deshalb ist $(T' \not\angle S_0)$ um (S'-(1+T'-'T)) Stellen nach rechts bzw links zu verschieben.

Wir erweitern 1.16 in der folgenden Weise:

1.17 Def: Seien $S_0, S_1, .., S_{n+1}$ Z-Sequenzen mit n e $\mathbb{N}$ und $T_1, .., T_{n+1}$ Sequenzstücke von S_0 so, daß für $1 \not= i \not= n-1$ $T_i \not\angle 'T_{i+1}$.

$$(S_0 \overset{T_1 .. T_{n+1}}{S_1 .. S_{n+1}}) = ((S_0 \overset{T_1 .. T_n}{S_1 .. S_n}) \overset{(T_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} (S_i'-(1+T_i'-'T_i)))}{S_{n+1}})$$

Die Substitution von T_i durch S_i für $1 \not= i \not= n$ bereichert bzw schmälert S_0 vor $'T_{n+1}$ um $\sum_{i=1}^{n} (S_i'-(1+T_i'-'T_i))$ Stellen .
Deshalb ist in $(S_0 \overset{T_1 .. T_n}{S_1 .. S_n})$ nicht T_{n+1} , sondern $(T_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} (S_i'-(1+T_i'-'T_i)))$ durch S_{n+1} zu ersetzen.

1.18 Bem: Sei S_0 eine Z-Sequenz und $m_1, .., m_n e Def(S_0)$ mit $m_i \not\angle m_{i+1}$ für $1 \not= i \not\angle n$.
Dann ist für alle $1 \not= i \not= n$ $\neg(\langle m_i, S_0(m_i)\rangle)$ st S_0 und $\neg(\langle m_i, S_0(m_i)\rangle) \vdash '\not\angle' \neg(\langle m_{i+1}, S_0(m_{i+1})\rangle)$ für $1 \not= i \not\angle n$.

1.19 Def: Seien $S_0, S_1, .., S_n$ Z-Sequenzen und $m_1, .., m_n e Def(S_0)$ mit n e $\mathbb{N}$ und $m_i \not\angle m_{i+1}$ für $1 \not= i \not\angle n$.

$$(S_0 \overset{m_1 .. m_n}{S_1 .. S_n}) \rightleftharpoons (S_0 \overset{T_1 .. T_n}{S_1 .. S_n}) \text{ mit } T_i = \neg(\langle m_i, S_0(m_i)\rangle) .$$

1.20 Def: Sei S eine Z-Sequenz und $m_1,..,m_n$ e Def(S) mit n e IN und $m_i < m_{i+1}$ für $1 \leq i < n$. Seien $z_1,..,z_n$ eZ.

Sei $S_i = \langle (1, z_i) \rangle$ für $1 \leq i \leq n$.

$(S \begin{smallmatrix} m_1 \cdot m_n \\ z_1 \cdot z_n \end{smallmatrix}) := (S \begin{smallmatrix} m_1 \cdot\cdot m_n \\ S_1 \cdot\cdot S_n \end{smallmatrix})$

1.21 Def: Sei S eine Z-Sequenz und seien t,z e Z.

Falls t in S nicht vorkommt, sei

$(S \begin{smallmatrix} t \\ z \end{smallmatrix}) = S$.

Andernfalls sind die Stellen $m_1,..,m_n$ eDef(S), an denen t in S vorkommt, eindeutig bestimmt. Wir können sie als so geordnet voraussetzen, daß $m_i < m_{i+1}$ für $1 \leq i < n$. Es sei dann

$(S \begin{smallmatrix} t \\ z \end{smallmatrix}) = (S \begin{smallmatrix} m_1 \cdot\cdot m_n \\ z \cdot\cdot z \end{smallmatrix})$

1.22 Bem: Seien $S_1,..,S_n$ Z-Sequenzen und t,z e Z.

$((S_1 \hat{} .. \hat{} S_n) \begin{smallmatrix} t \\ z \end{smallmatrix}) = ((S_1 \begin{smallmatrix} t \\ z \end{smallmatrix}) \hat{} .. \hat{} (S_n \begin{smallmatrix} t \\ z \end{smallmatrix}))$

Wir erweitern 1.21 rekursiv:

1.23 Def: Sei S eine Z-Sequenz und $t_1,..,t_{k+1}, z_1,..,z_{k+1}$ e Z mit k e IN. Die t_i seien paarweise verschieden.

Falls t_{k+1} in S nicht vorkommt, sei

$(S \begin{smallmatrix} t_1 \cdot\cdot t_{k+1} \\ z_1 \cdot\cdot z_{k+1} \end{smallmatrix}) = (S \begin{smallmatrix} t_1 \cdot\cdot t_k \\ z_1 \cdot\cdot z_k \end{smallmatrix})$.

Andernfalls sind die Stellen $m_1,..,m_n$ e Def(S), an denen t_{k+1} in S vorkommt, eindeutig bestimmt.

Wir können sie als so geordnet voraussetzen, daß $m_i < m_{i+1}$ für $1 \leq i < n$. Es sei dann

$(S \begin{smallmatrix} t_1 \cdot\cdot t_{k+1} \\ z_1 \cdot\cdot z_{k+1} \end{smallmatrix}) = ((S \begin{smallmatrix} t_1 \cdot\cdot t_k \\ z_1 \cdot\cdot z_k \end{smallmatrix}) \begin{smallmatrix} m_1 \cdot\cdot\cdot m_n \\ z_{k+1} \cdot z_{k+1} \end{smallmatrix})$.

1.24 Bem: Seien $S_1,..,S_n$ Z-Sequenzen und $t_1,..,t_k, z_1,..,z_k$ eZ mit k e IN. Die t_i seien paarweise verschieden.

Dann ist

$((S_1 \hat{} .. \hat{} S_n) \begin{smallmatrix} t_1 \cdot\cdot t_k \\ z_1 \cdot\cdot z_k \end{smallmatrix}) = ((S_1 \begin{smallmatrix} t_1 \cdot t_k \\ z_1 \cdot z_k \end{smallmatrix}) \hat{} .. \hat{} (S_n \begin{smallmatrix} t_1 \cdot t_k \\ z_1 \cdot z_k \end{smallmatrix}))$

2. SYNTAX DER SPRACHE IL

Zunächst definieren wir die Menge GZ der Grundzeichen von IL.

2.1 Def: Die Menge GZ enthält als Elemente:

1) Logische Zeichen:

- für die Negation
- $\vdash$ für die Implikation
- & für die Konjunktion
- v für die Disjunktion
- A als Allquantor
- E als Existenzquantor
- L als Klassenoperator
- i als Kennzeichnungsoperator

2) Deskriptive Zeichen:

a_i für alle i e IN als Individuenkonstanten

P_i^n für alle i,n e IN als Prädikatkonstanten

3) = als Identitätszeichen

4) Variablen:

x_i, y_i für alle i e IN als Individuenvariablen

5) Hilfszeichen:

(und)

2.2 Def: IK sei die Menge der Individuenkonstanten,
IV die der Individuenvariablen und
PK die der Prädikatkonstanten .

Für alle n e IN sei
n-PK $:=$ $\{P_i^n$ / i e IN $\}$ genannt Menge der
n-stelligen Prädikatkonstanten

2.3 Def: Für alle i e IN sei

i der INDEX von a_i, x_i, y_i .

Bei den Ausdrücken der Sprache IL wird es sich um spezielle Sequenzen von Grundzeichen handeln.
Der Einfachheit halber werden wir,wenn es nicht zu Zweideutigkeiten führt, für $z_1,.,z_n \in GZ$ $z_1..z_n$ schreiben anstelle von $(z_1,.,z_n)$ und für GZ-Sequenzen $S_1,.,S_n$ statt $(S_1^\frown..^\frown S_n)$ einfach $S_1..S_n$.
Im folgenden definieren wir für alle $n \in \mathbb{N}$ die Mengen $n\text{-}IL_0$,n-IL,n-PL,SL der n-stelligen Individuengrundausdrücke bzw n-stelligen Individuenausdrücke bzw n-stelligen Prädikatausdrücke bzw Sätze von IL.Simultan definieren wir,was es heißt,daß in einem solchen Ausdruck eine Individuenkonstante durch eine Induviduenvariable substituierbar ist.

2.4 Def: Sei $c \in IK$ und $v \in IV$

1) $IK^1 c\ 1\text{-}IL_0 c\ 1\text{-}IL$, dh
einelementige Sequenzen von Individuenkonstanten sind einstellige Individuengrundausdrücke und diese wiederum einstellige Individuenausdrücke.

Für alle $I \in IK^1$ gilt:
c ist in I durch v substituierbar gdw
c in I vorkommt.

2) Sei $I^n \in n\text{-}IL$ und $I_0^m \in m\text{-}IL_0$,also
I^n ein n-stelliger Individuenausdruck und
I_0^m ein m-stelliger Individuengrundausdruck.
Dann ist $I^n I_0^m \in (n+m)\text{-}IL$,also
ein (n+m)-stelliger Individuenausdruck.

c ist darin durch v substituierbar gdw
c in I^n oder in I_0^m durch v substituierbar ist,
aber c weder in I^n noch in I_0^m vorkommt,ohne darin durch v substituierbar zu sein.

3) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $(n\text{-}PK)^1 c\ n\text{-}PL$,also
einelementige Sequenzen von n-stelligen Prädikatkonstanten sind n-stellige Prädikatausdrücke.

Für alle $P^n \in (n\text{-}PK)^1$ gilt:
c ist darin nicht durch v substituierbar.

4) Sei $P^n \in n\text{-}PL$ und $I^n \in n\text{-}IL$.
Dann ist $P^n I^n \in SL$.

c ist in P^nI^n durch v substituierbar gdw
c in P^n oder in I^n durch v substituierbar ist,
aber c weder in P^n noch in I^n vorkommt,ohne darin
durch v substituierbar zu sein.

5) Sei S e SL.
Dann ist auch -S e SL
c ist in -S durch v substituierbar gdw
c in S durch v substituierbar ist.

6) Seien S_1, S_2e SL.
Dann ist auch $(S_1 \leftarrow S_2)$ e SL.

c ist darin durch v substituierbar gdw
c in S_1 oder in S_2 durch v substituierbar ist,
aber c weder in S_1 noch in S_2 vorkommt,ohne darin
durch v substituierbar zu sein.

7) Seien $S_1,..,S_n$e SL mit $2 \neq n$.
Dann sind auch $(S_1\&..\&S_n),(S_1v..vS_n)$ e SL.

c ist darin durch v substituierbar gdw
c in mindestens einem S_i durch v substituierbar ist,
aber c in keinem S_i vorkommt,ohne darin durch v
substituierbar zu sein.

8) Sei S e SL und seien $c_1,..,c_n$ e IK mit n e $\mathbb{N}$ und
$v_1,..,v_n$e IV jeweils paarweise verschieden.
Für $1 \neq i \neq n$ sei c_i in S durch v_i substituierbar.
Dann ist
$iv_1..v_n(S^{c_1..c_n}_{v_1..v_n})$ e $n\text{-}IL_0$ c n-IL

$Lv_1..v_n(S^{c_1..c_n}_{v_1..v_n})$ e n-PL

$Qv_1..v_n(S^{c_1..c_n}_{v_1..v_n})$ e SL ,wobei Q=A oder Q=E .
c ist darin durch v substituierbar gdw
$c \neq c_1,..,c_n$ und $v \neq v_1,..,v_n$ und c in S durch v
substituierbar ist.

9) Seien I^n_1, I^n_2 e n-IL.
Dann ist $I^n_1 = I^n_2$ e SL
c ist darin durch v substituierbar gdw
c in I^n_1 oder in I^n_2 durch v substituierbar ist,
aber c weder in I^n_1 noch in I^n_2 vorkommt,ohne darin
durch v substituierbar zu sein.

Daß eine Individuenkonstante c in einem Satz S durch eine Individuenvariavle v substituierbar ist, bedeutet sozusagen, daß erstens c in S vorkommt und zweitens, wenn man c in S durch v ersetzte, v in (S_v^c) an allen Stellen frei vorkäme.

2.5 Def: $IL_0 \rightleftharpoons 0\text{-}(n\text{-}IL_0 \;/\; n \in \mathbb{N})\text{-}$, genannt Menge der Individuengrundausdrücke von $\mathbb{L}$,

$IL \rightleftharpoons 0\text{-}(n\text{-}IL \;/\; n \in \mathbb{N})\text{-}$, genannt Menge der Individuenausdrücke von $\mathbb{L}$

$PL \rightleftharpoons 0\text{-}(n\text{-}PL \;/\; n \in \mathbb{N})\text{-}$, genannt Menge der Prädikatausdrücke von $\mathbb{L}$.

$AL \rightleftharpoons (IL \circ PL \circ SL)$, genannt Menge der Ausdrücke von $\mathbb{L}$.

2.6 Bem: $IL_0 \subset IL$.

2.7 Def: Für A e AL sei

Rang(A) die Anzahl der Stellen, an denen ein logisches Zeichen $\neq$ i in A vorkommt

Name(A) die Anzahl der Stellen, an denen das Zeichen i in A vorkommt.

Grad(A) die Anzahl der Stellen, an denen ein logischen Zeichen in A vorkommt .

traGra(A) $\rightleftharpoons$ ⟨Name(A), Rang(A)⟩ , genannt transfiniter Grad von A.

2.8 Bem: Sei A e AL

1) Grad(A)= Rang(A)+Name(A)

2) Grad(A)=0 gdw traGra(A)=⟨0,0⟩

2.9 Def: $BS \rightleftharpoons \text{-}(\, S \;/\; S \in SL$ und es gibt ein n e $\mathbb{N}$, C^n e n-PK und $c_1,..,c_n$ e IK so, daß $S=C^n c_1..c_n)\text{-}$, genannt Menge der BASISSÄTZE .

$BG \rightleftharpoons \text{-}(\, S \;/\; S \in SL$ und es gibt ein n e $\mathbb{N}$ und $c_1,..,c_{2n}$ e IK so, daß $S= c_1..c_n=c_{n+1}..c_{2n})\text{-}$, genannt Menge der BASISGLEICHUNGEN.

2.10 Bem: Sei S e SL

Grad(S)=0 gdw S e (BS o BG) gdw traGra(S)=⟨0,0⟩

2.11 Bem: Seien $A_1, A_2 \in AL$, $c_1,..,c_n \in IK$ paarverschieden, $k_1,..,k_n \in IK$ paarverschieden, $v_1,..,v_n \in IV$ paarverschieden. Sei für alle i
c_i in S_1 und k_i in S_2 durch v_i substituierbar.
Sei $(A_1 \frac{c_1 \cdot c_n}{v_1 \cdot v_n}) = (A_2 \frac{k_1 \cdot k_n}{v_1 \cdot v_n})$. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$:

c_i kommt in A_1 an der Stelle m vor gdw
k_i in A_2 an der Stelle m vorkommt.

Bew: Der Beweis wäre eigentlich durch eine umständliche Induktion nach dem Grad von A_1 und A_2 zu führen. Stattdessen stellen wir, etwas ungenauer, folgende allgemeinen Überlegungen an:

Sei $B_1 := (A_1 \frac{c_1 \cdot c_n}{v_1 \cdot v_n}) = (A_2 \frac{k_1 \cdot k_n}{v_1 \cdot v_n}) =: B_2$.
Komme c_i in A_1 an der Stelle m vor.
Dann kommt v_i in B_1 und B_2 an der Stelle m vor.
Wir behaupten: v_i kommt nicht in A_2 an der Stelle m vor.
Denn angenommen, dies wäre der Fall, dann gäbe es in A_2 ein Bindungszeichen, welches v_i enthielte. Nachdem die Substitution der Konstanten die Bindungszeichen nicht berührt, träte dieses Bindungszeichen an gleicher Stelle auch in $B_2 = B_1$ und also auch in A_1 auf. Nun käme c_i in A_1 und v_i in A_2 an der Stelle m vor. Die Stelle m läge in A_1 im Bereich dieses Bindungszeichens, und c_i wäre in A_1 im Widerspruch zur Voraussetzung nicht durch v_i substituierbar (siehe 2.4,8).
v_i kommt also nicht in A_2 an der Stelle m vor.
Nachdem aber v_i in B_2 an der Stelle m vorkommt, muß k_i in A_2 an der Stelle m vorkommen, vorausgesetzt, daß c_i in A_1 an der Stelle m vorkommt.
Die Umkehrung dieses Satzes gilt aus symmetrischen Gründen.

2.12 Bem: Seien $A_1, A_2, c_1,..,c_n, k_1,..,k_n, v_1,..,v_n$ wie in 2.11.
Dann gilt:
Für alle $h_1,..,h_n \in IK$ ist $(S_1 \frac{c_1 \cdot c_n}{h_1 \cdot h_n}) = (S_2 \frac{k_1 \cdot k_n}{h_1 \cdot h_n})$

Bew: Die Behauptung folgt aus 2.11.

3.DAS KENNZEICHNENDE PRÄDIKAT EINES INDIVIDUENAUSDRUCKS

Individuenausdrücke sind im einfachsten Fall Individuengrundausdrücke,dh nach 2.4,1) entweder einelementige Sequenzen von Individuenkonstanten oder aber Kennzeichnungsausdrücke nach 2.4,8).
Aus den Individuengrundausdrücken lassen sich nach 2.4,2) durch sukzessive Aneinanderreihung weitere Individuenausdrücke bilden.Weil es sich um die Aneinanderreihung von Individuengrundausdrücken handelt,ist dabei die Erzeugungsweise solcher Individuenausdrücke eindeutig bestimmt.Es gilt also:

3.1 Bem: Seien $I^{n}1$ e n_1-IL,$I^{n}2$ e n_2-IL, $I^{m}1$ e m_1-IL_0,$I^{m}2$ e m_2-IL_0 und sei $I^{n}1I_0^{m}1 = I^{n}2I_0^{m}2$.

Dann ist $n_1=n_2$,$m_1=m_2$ und $I^{n}1=I^{n}2$,$I_0^{m}1=I_0^{m}2$.

Um unter den syntaktisch zulässigen die semantisch sinnvollen Individuenausdrücke auszusondern,definieren wir eine Funktion kp ,die jedem n-stelligen Individuenausdruck einen n-stelligen Prädikatausdruck zuordnet,den wir das KENNZEICHNENDE PRÄDIKAT dieses Individuenausdrucks nennen wollen.

3.2 Def: Sei kp e PL^{IL} mit $kp(I^n)$ e n-PL für alle I^ne n-IL und n e $\mathbb{N}$ definiert durch:

1) Für c e IK sei
$kp((c)) = Lx_1\ c=x_1$
2) Sei SeSL und seien $c_1,..,c_n$eIK mit ne $\mathbb{N}$ und $v_1,..,v_n$eIV jeweils paarweise verschieden.Für $1 \neq i \neq n$ sei c_i in S durch v_i substituierbar .Dann sei
$kp(iv_1..v_n(S^{c_1..c_n}_{v_1..v_n})) = Lv_1..v_n(S^{c_1..c_n}_{v_1..v_n})$
3) Sei I^ne n-IL und I_0^m e m-IL_0.Dann sei
$kp(I^nI_0^m) = Lx_1..x_ny_1..y_m(kp(I^n)x_1..x_n \ \&\ kp(I_0^m)y_1..y_m)$

Dadurch ist für alle I e IL kp(I) eindeutig definiert; was den Punkt 2) von 3.2 angeht,weil für S_1,S_2 e SL und jeweils paarverschiedene $c_1,..,c_n$eIK ,$k_1,..,k_n$eIK und $v_1,..,v_n$eIV mit $iv_1..v_n(S_1{}^{c_1..c_n}_{v_1..v_n})=iv_1..v_n(S_2{}^{k_1..k_n}_{v_1..v_n})$ auch
$Lv_1..v_n(S_1{}^{c_1..c_n}_{v_1..v_n})=Lv_1..v_n(S_2{}^{k_1..k_n}_{v_1..v_n})$
und im Hinblick auf Punkt 3) von 3.2 wegen Bemerkung 3.1.

3.3 Bem: Sei I e IL

1) c e IK kommt in kp(I) genau dann vor, wenn c in I vorkommt.

2) Seien $c_1,..,c_n$ e IK mit n e $\mathbb{N}$ paarverschieden und $k_1,..,k_n$ e IK.

$kp((I^{c_1..c_n}_{k_1..k_n}))=(kp(I)^{c_1..c_n}_{k_1..k_n})$

Dies ist aus 3.2 unmittelbar zu ersehen.

3.4 Beh: Sei I e IL

1) $Name(kp(I)) \neq Name(I)$

2) Falls $Name(I)\neq 0$, ist $Name(kp(I)) \not\subset Name(I)$

Bew:

1) ist ebenfalls unmittelbar aus 3.2 zu ersehen

2) ist klar für Individuengrundausdrücke.
Sei also I^n e n-IL und I^m_0 e m-IL_0 und gelte die Behauptung für I^n.
Falls nun $Name(I^nI^m_0)\neq 0$, dann $Name(I^n)\neq 0$ oder $Name(I^m_0)\neq 0$
Dann nach Indvor $Name(kp(I^n)) \not\subset Name(I^n)$ oder $Name(kp(I^m_0)) \not\subset Name(I^m_0)$. Wegen 3.4,1) gilt dann $Name(kp(I^n))+Name(kp(I^m_0)) \not\subset Name(I^n)+Name(I^m_0)$.
Also $Name(kp(I^nI^m_0))=Name(kp(I^n))+Name(kp(I^m_0)) \not\subset Name(I^n)+Name(I^m_0)=Name(I^nI^m_0)$.

Wir werden I^n e n-IL bei einer Bewertung genau dann als semantisch sinnvoll betrachten, wenn bei dieser Bewertung der Satz

$$Ex_1..x_n(kp(I^n)x_1..x_n \;\&\; Ay_1..y_n(kp(I^n)y_1..y_n \leftrightarrow y_1..y_n=x_1..x_n))$$

wahr ist.

3.5 Def: Wir definieren die Funktion 1kp e PL^{IL} mit $1kp(I^n)$ e n-PL für alle I^n e n-IL wie folgt:
Für I^n e n-IL sei

$$1kp(I^n) = Lx_1..x_n\,(kp(I^n)x_1..x_n \;\&\; Ay_1..y_n(kp(I^n)y_1..y_n \leftrightarrow y_1..y_n=x_1..x_n))$$

I^n e n-IL wird bei einer Bewertung semantisch sinnvoll sein genau dann, wenn bei dieser Bewertung der Satz $Ex_1..x_n\ 1kp(I^n)x_1..x_n$ wahr ist.

4. 2-WERTIGE SEMANTIK

Unsere 2-wertige Semantik weist dem Begriff des wahren Satzes die zentrale Position zu. Sie interessiert sich nur dafür, ob ein Satz wahr ist oder nicht, und nennt die nicht-wahren Sätze falsch. Natürlich ist bei diesem Verständnis jeder Satz entweder wahr oder falsch.

4.1 Def: Eine Funktion $B_G \in \langle w,f \rangle^{BG}$ heißt eine BASISGLEICHUNGSBEWERTUNG gdw

1) Für $c_1, c_2, c_3 \in$ IK
   a) $B(c_1=c_1) = w$
   b) Falls $B(c_1=c_2)=w$, dann $B(c_2=c_1)=w$
   c) Falls $B(c_1=c_2) = w$ und $B(c_2=c_3) = w$, dann $B(c_1=c_3)=w$
2) Für $c_1,..,c_n,k_1,..,k_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist
   $B(c_1..c_n=k_1..k_n) = w$ gdw für $1 \leq i \leq n$ $B(c_i=k_i) = w$

4.2 Def: Sei $B_G \in \langle w,f \rangle^{BG}$ und $B_S \in \langle w,f \rangle^{BS}$.
B_S heißt MIT B_G VERTRÄGLICH gdw
für alle $n \in \mathbb{N}$, C^n n-PK, $c_1,..,c_n,k_1,..,k_n \in$ IK gilt:
Falls $B_G(c_1..c_n=k_1..k_n)=w$, dann $B_S(C^n c_1..c_n)=B_S(C^n k_1..k_n)$

4.3 Def: Eine Funktion $B \in \langle w,f \rangle^{SL}$ heißt eine BEWERTUNG VON SL gdw

1) B/BG eine Basisgleichungsbewertung ist
2) B/BS mit B/BG verträglich ist
3) Für $S \in$ SL
   $B(-S)=w$ gdw $B(S)=f$
4) Für $S_1,..,S_n \in$ SL mit $2 \leq n$
   $B((S_1\&..\&S_n))=w$ gdw für alle $1 \leq i \leq n$ $B(S_i)=w$
   $B((S_1 v..v S_n))=w$ gdw für mind. ein $1 \leq i \leq n$ $B(S_i)=w$
5) Für $S_1, S_2 \in$ SL
   $B((S_1 \rightarrow S_2))=B((-S_1 v S_2))$
6) Für $S \in$ SL, jeweils paarweise verschiedene $c_1,..,c_n \in$ IK
   $v_1,..,v_n \in$ IV, wobei c_i in S durch v_i substituierbar ist,
   a) $B(Av_1..v_n(S^{c_1..c_n}_{v_1..v_n}))=w$ gdw für alle $(k_1,..,k_n) \in IK^n$
   $B((S^{c_1..c_n}_{k_1..k_n}))=w$

$B(Ev_1..v_n(S^{c_1..c_n}_{v_1..v_n}))=w$ gdw für mind ein $(k_1,..,k_n)\in IK^n$

$B((S^{c_1..c_n}_{k_1..k_n}))=w$

b) für $k_1,..,k_n\in IK$

$B(Lv_1..v_n(S^{c_1..c_n}_{v_1..v_n})k_1..k_n)=B((S^{c_1..c_n}_{k_1..k_n}))$

7) Für P^n e n-PL und I^n e n-IL mit $Name(I^n)\neq 0$ ist

$B(P^nI^n)=B((Ex_1..x_n\ 1kp(I^n)x_1..x_n\ \&$
$Ax_1..x_n\ (kp(I^n)x_1..x_n\leftarrow P^nx_1..x_n)))$

Das bedeutet nach den vorangehenden Regeln:
$B(P^nI^n)=w$ gdw es mind ein $(k_1,..,k_n)\in IK^n$ gibt
mit $B(1kp(I^n)k_1..k_n)=w$ und wenn für alle
$(c_1,..,c_n)\in IK^n$ $B((kp(I^n)c_1..c_n\leftarrow P^nc_1..c_n))=w$

Dies wiederum bedeutet nach Definition von 1kp
und den vorangehenden Regeln:
$B(P^nI^n)=w$ gdw es mind ein $(k_1,..,k_n)\in IK^n$ gibt so,
daß $B(kp(I^n)k_1..k_n)=w$ und für alle $(c_1,..,c_n)\in IK^n$
$B((kp(I^n)c_1..c_n\leftarrow c_1..c_n=k_1..k_n))=w$ und
$B((kp(I^n)c_1..c_n\leftarrow P^nc_1..c_n))=w$

8) Für I^n_1,I^n_2 e n-IL

a) mit $Name(I^n_1)\neq 0$ ist

$B(I^n_1=I^n_2)=B((Ex_1..x_n\ 1kp(I^n)x_1..x_n\ \&$
$Ax_1..x_n\ (kp(I^n)x_1..x_n\leftarrow I^n_2=x_1..x_n)))$

Das bedeutet analog zu 7)
$B(I^n_1=I^n_2)=w$ gdw es mind ein $(k_1,..,k_n)\in IK^n$ gibt so,
daß $B(kp(I^n_1)k_1..k_n)=w$ und für alle $(c_1,..,c_n)\in IK^n$
$B((kp(I^n_1)c_1..c_n\leftarrow c_1..c_n=k_1..k_n))=w$ und
$B((kp(I^n_1)c_1..c_n\leftarrow I^n_2=c_1..c_n))=w$

b) mit $Name(I^n_1)=0\neq Name(I^n_2)$

$B(I^n_1=I^n_2)=B(I^n_2=I^n_1)$

Unsere Semantik ist gedacht für solche Verwendungen, bei denen für jedes Element des zugrundegelegten Individuenbereichs schon eine Individuenkonstante als Name zur Verfügung steht. Die Kennzeichnung betrachten wir prinzipiell als ein zusätzliches Mittel der Benennung.
Dementsprechend genügt es für uns, die Bewertung der Quantifikationen nur von der Bewertung aller Konstanteneinsetzungen abhängig zu machen.

Wie schon gesagt, betrachten wir I^ne n-IL bei einer Bewertung B von SL genau dann als semantisch sinnvoll, wenn $B(Ex_1..x_n\ 1kp(I^n)x_1..x_n)=w$, also nach 4.3,6) genau dann, wenn es mindestens ein $(k_1,..,k_n)eIK^n$ gibt so, daß $B(1kp(I^n)k_1..k_n)= w$. In diesem Fall ist "I^n" eine zusätzliche Möglichkeit, den Träger des Namens "$k_1..k_n$" zu bezeichnen.

4.4 Bem: Seien $c_1,..,c_n,k_1,..,k_n e$ IK mit ne $\mathbb{N}$ und B eine Bewertung von SL

1) $B(kp(c_1..c_n)k_1..k_n)=B(c_1..c_n=k_1..k_n)$

2) $B(1kp(c_1..c_n)k_1..k_n)=B(c_1..c_n=k_1..k_n)$

3) $B(1kp(c_1..c_n)c_1..c_n)=w$

Bew:

1) folgt aus 3.2,1) und 3) zusammen mit 4.1,2) und 4.3,1) und 4.3,6b) .

2) folgt aus Punkt 1) nach 3.5 ,4.3,1) und 4.3,6b).

3) folgt aus Punkt 2) und 4.3,1)

Sequenzen von Individuenkonstanten sind also bei allen Bewertungen semantisch sinnvoll, wie aus 4.4,3) hervorgeht.

4.5 Bem: Sei $SeSL, c_1,..,c_n eIK$ und $v_1,..,v_n eIV$ jeweils paarverschieden, Für $1 \neq i \neq n$ sei c_i in S durch v_i substituierbar. Seien $k_1,..,k_n eIK$.
B sei eine Bewertung von SL.

1) $B(kp(iv_1..v_n(S^{c_1..c_n}_{v_1..v_n}))k_1..k_n)=B((S^{c_1..c_n}_{k_1..k_n}))$

2) $B(1kp(iv_1..v_n(S^{c_1..c_n}_{v_1..v_n}))k_1..k_n)=$

$B((\ (S^{c_1..c_n}_{k_1..k_n})\ \&\ Av_1..v_n((S^{c_1..c_n}_{v_1..v_n}) \leftarrow v_1..v_n=k_1..k_n)))$

Bew: 1) folgt aus 3.2,2) und 4.3,6b)

2) folgt aus 1),3.5 und 4.3,6b)

Ein Individuenausdruck der Gestalt $iv_1..v_n(S^{c_1..c_n}_{v_1..v_n})$ ist bei B also genau dann semantisch sinnvoll, wenn für mindestens ein $(k_1,..,k_n)\in IK^n$

$B(((S^{c_1..c_n}_{k_1..k_n})\&Av_1..v_n((S^{c_1..c_n}_{v_1..v_n}) \leftrightarrow v_1..v_n=k_1..k_n)))=w$

4.6 Bem: Sei I^n e n-IL und I^m_0 e m-IL_0, $c_1,..,c_n,k_1,..,k_m \in$ IK und B eine Bewertung von SL

1) $B(kp(I^nI^m_0)c_1..c_nk_1..k_m) =$

$B((kp(I^n)c_1..c_n \;\&\; kp(I^m_0)k_1..k_m))$

2) $B(1kp(I^nI^m_0)c_1..c_nk_1..k_m)=$

$B((1kp(I^n)c_1..c_n \;\&\; 1kp(I^m_0)k_1..k_m))$

Bew:

1) folgt aus 3.2,3) und 4.3,6b)
2) folgt aus 1) ,3,5,4.3,6b) und elementarer Prädikatenlogik.

Ein Individuenausdruck der Gestalt $I^nI^m_0$ ist bei B also genau dann semantisch sinnvoll, wenn sowohl I^n als auch I^m_0 bei B semantisch sinnvoll sind.

Bei semantisch sinnvollen Individuenausdrücken handelt es sich also um Verkettungen semantisch sinnvoller Individuengrundausdrücke, wobei Individuenkonstanten in jedem Fall und Kennzeichnungsausdrücke unter den in 4.5 dargestellten Bedingungen semantisch sinnvoll sind.

Wenn $Name(I^n)\neq 0$, also I^n keine Sequenz von Individuenkonstanten und I^n daher nicht apriori semantisch sinnvoll ist, ist nach 4.3,7) ein Satz der Gestalt P^nI^n genau dann wahr, wenn I^n semantisch sinnvoll ist und für alle $(k_1,..k_n)\in IK^n$, die als koreferentiell mit I^n betrachtet werden können, $P^nk_1..k_n$ wahr ist.

4.7 Def: Sei U eine abzählbare Menge.
Eine Funktion D heißt INTERPRETATION VON $\mathfrak{L}$ ÜBER U gdw

1) $(0 \cup \{IK^n / n \in \mathbb{N}\} \cup PL \cup SL) \subseteq Def(D) \subseteq AL$
2) D/IK^1 ist eine bezüglich U^1 surjektive Funktion von IK^1 nach U^1.
3) Für $(k_1,..,k_n) \in IK^n$ mit $2 \neq n$ ist $D(k_1..k_n) \in U^n$ und zwar $D(k_1..k_n)=(D(k_1)^{\frown}..^{\frown}D(k_n))$
4) Für C^n e n-PK ist $D(C^n) \subseteq U^n$
5) D/SL ist eine Bewertung von SL
6) Für $c_1,..,c_n,k_1,..,k_n \in IK$ ist $D(c_1..c_n=k_1..k_n)=w$ gdw $D(c_1..c_n)=D(k_1..k_n)$
7) Für C^n e n-PK und $c_1,..,c_n \in IK$ ist $D(C^n c_1..c_n)=w$ gdw $D(c_1..c_n) \in D(C^n)$
8) Für P^n e n-PL mit $Grad(P^n) \neq 0$ ist $D(P^n)=\{D(c_1..c_n)/c_1,..,c_n \in IK$ und $D(P^n c_1..c_n)=w\}$
9) Für I^n e n-IL mit $Name(I^n) \neq 0$ gilt:
a) $I^n \in Def(D)$ gdw $D(\exists x_1..x_n 1kp(I^n)x_1..x_n)=w$
b) Für alle $(c_1,..,c_n) \in IK^n$:
Falls $D(1kp(I^n)c_1..c_n)=w$, dann $D(c_1..c_n)=D(I^n)$.

Durch 2) ist gewährleistet, daß für jedes Element des Individuenbereichs eine Konstante als Name zur Verfügung steht. Nach 2) und 3) werden Sequenzen von Individuenkonstanten bei jeder Interpretation gedeutet. Dies entspricht dem Umstand, daß wir sie in jedem Fall als semantisch sinnvoll betrachten. 6) bestimmt die in 5) geforderte Basisgleichungsbewertung näher, 7) die Bewertung der Basissätze.
8) legt die Interpretation komplexer Prädikatausdrücke fest. Wegen unseres Verständnisses der Kennzeichnung als zusätzlichen Mittels der Benennung, brauchen wir bei der Bestimmung von $D(P^n)$ nur die $D(c_1..c_n)$ mit $c_i \in IK$ zu berücksichtigen.
9) besagt, daß Individuenausdrücke, in denen Kennzeichnungen vorkommen, genau dann interpretiert werden, wenn sie semantisch sinnvoll sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn das kennzeichnende Prädikat des betreffenden Individuenausdrucks eine einelementige Extension besitzt. Nach 9b) wird einem semantisch sinnvollen Individuenausdruck durch die Interpretation genau jenes Element als Denotat zugeordnet.

4.8 Bem: Sei I^n e n-IL,U eine abzählbare Menge und D eine Interpretation von IL über U.

Falls $D(Ex_1..x_n 1kp(I^n)x_1..x_n)=w$, dann ist

$D(kp(I^n)) = \dot{-}(D(I^n))\dot{-}$

Bew:

1.Fall: $Name(I^n)=0$.

Dann ist I^n eine Sequenz von Individuenkonstanten.

Hierfür folgt die Behauptung aus 4.7,8),4.4,1),4.7,6)

2.Fall: $Name(I^n)\neq 0$

Sei $D(Ex_1..x_n 1kp(I^n)x_1..x_n)=w$.

Dann nach 4.7,9) I^n e Def(D).

Außerdem gibt es ein $(k_1,..,k_n)eIK^n$ so,daß

(I) $D(1kp(I^n)k_1..k_n)=w$.

Dann nach Definition von 1kp und 4.3

(II) $D(kp(I^n)k_1..k_n)=w$ und

(III) $D(Ay_1..y_n(kp(I^n)y_1..y_n \leftrightarrow y_1..y_n=k_1..k_n))= w$

Falls nun x e $D(kp(I^n))$,gibt es nach 4.7,8) ein $(c_1,..,c_n)eIK$ so,daß $D(kp(I^n)c_1..c_n)=w$ und $x=D(c_1.c_n)$

Nach (III) ist dann $D(c_1..c_n=k_1..k_n)=w$ und nach 4.7,6) $D(c_1.c_n)=D(k_1.k_n)$.

Andererseits ist wegen (I) und 4.7,9b) $D(k_1.k_n)=D(I^n)$.

Also ist $x=D(c_1.c_n)=D(k_1.k_n)=D(I^n)$,also x e $\dot{-}(D(I^n))\dot{-}$

Daher $D(kp(I^n))$ c $\dot{-}(D(I^n))\dot{-}$.

Umgekehrt ist,wie schon gesagt $D(k_1.k_n)=D(I^n)$.

Wegen (II) und 4.7,8) ist also $D(I^n)eD(kp(I^n))$.

Insgesamt gilt deshalb,daß $D(kp(I^n))=\dot{-}(D(I^n))\dot{-}$

Nach 4.8 ist also das Denotat eines semantisch sinnvollen Individuenausdruck einziges Element in der Extension dessen kennzeichnenden Prädikats.

4.9 Def: Seien S,S_1,S_2 e SL.

1) S heißt LOGISCH WAHR,in Zeichen L S ,gdw für alle Bewertungen B von SL B(S)=w
2) S_2 FOLGT LOGISCH AUS S_1 ,in Zeichen S_1L S_2, gdw für alle Bewertungen B von SL mit $B(S_1)=w$ $B(S_2)=w$.
3) S_1 und S_2 heißen LOGISCH ÄQUIVALENT,in Zeichen $S_1 \doteq S_2$, gdw S_1L S_2 und S_2 L S_1

4.10 Beh: Sei B_G eine Basisgleichungsbewertung und $B_S e (w,f)^{BS}$ mit B_G verträglich.

Dann gibt es genau eine Bewertung B von SL derart, daß B/BG = B_G und B/BS = B_S

Bew: Seien B_G und B_S wie in der Voraussetzung und sei S e SL.
Wir behaupten: durch die Vorschriften von 4.3 ist die Bewertung von S eindeutig festgelegt, und beweisen dies durch Induktion nach dem transfiniten Grad von S.

Nach 2.10 ist durch B_G und B_S für alle S e SL mit traGra(S)=(0,0) die Bewertung eindeutig festgelegt.

Induktionsvoraussetzung:
Für alle Sätze mit kleinerem transfinitem Grad als (n,m) ist die Bewertung eindeutig festgelegt.
Induktionsbehauptung:
Für alle Sätze mit transinitem Grad (n,m) ist dann die Bewertung auch eindeutig festgelegt.

Sei also SeSL mit traGra(S)=(n,m).
Falls es sich bei S um eine Negation, eine Konjunktion oder Disjunktion, eine Implikation, einen All-oder einen Existenzsatz handelt, ist der Induktionsschritt trivial. Die Sätze, von deren Bewertung in 4.3 die Bewertung von S abhängig gemacht wird, haben kleineren Rang als S und höchstens so großen Namen wie S, also nach 0.27 kleineren transfiniten Grad als S. Dasselbe gilt nach 4.3,6b), wenn S die Gestalt $P^n I^n$ hat, wobei P^n ein komplexer Prädikatausdruck ist und I^n eine Sequenz von Individuenkonstanten.
Sei nun S der Gestalt $P^n I^n$ mit P^ne n-PL und I^ne n-IL und Name(I^n)≠0.
Nach 4.3,7) hängt dann die Bewertung von S eindeutig ab von der Bewertung aller Sätze der Gestalten
(I) $kp(I^n)k_1..k_n$
(II) $(kp(I^n)c_1..c_n \dashv c_1..c_n = k_1..k_n)$
(III) $(kp(I^n)c_1..c_n \dashv P^n c_1..c_n)$
wobei $c_1,..,c_n,k_1,..,k_n$ eIK

Da $Name(I^n) \neq 0$, ist nach 3.4,2) $Name(kp(I^n)) \not\supset Name(I^n)$ und deshalb auch
$Name(kp(I^n))+Name(P^n) \not\supset Name(I^n)+Name(P^n)=Name(S)$
Für alle Sätze der Gestalten (I),(II),(III) liegt der Name nicht über $(Name(kp(I^n))+Name(P^n))$, sie haben also kleineren Namen als S.
Nach Induktionsvoraussetzung ist für sie alle die Bewertung eindeutig festgelegt.
Durch 4.3,7) ist sie es dann auch für S.
Für den Fall, daß S die Gestalt $I_1^n=I_2^n$ hat, wobei $Name(I_1^n) \neq 0$ oder $Name(I_2^n) \neq 0$, ist der Beweis wie im vorhergehenden Fall.

4.11 Bem: Sei B e $\dashv(w,f)\vdash^{BS}$
Dann gibt es mindestens eine Bewertung B von SL so, daß $B/BS = B_S$.

Bew: Wir definieren B_G e $\dashv(w,f)\vdash^{BG}$ wie folgt:
Für $c_1,.,c_n,k_1,.,k_n \in IK$ sei
$B_G(c_1.c_n=k_1.k_n)=w$ gdw $(c_1,.,c_n)=(k_1,.,k_n)$.
B_G ist die triviale Basisgleichungsbewertung und B_S ist trivialerweise mit B_G verträglich.
Die Behauptung folgt dann aus 4.10.

4.12 Beh: Sei U eine abzählbare Menge und D_0 eine Funktion mit
1) $Def(D_0)=(IK^1 \circ PK)$
2) D_0/IK^1 ist eine bezüglich U^1 surjektive Funktion von IK^1 nach U^1.
3) Für C^n e n-PK ist $D_0(C^n) \subset U^n$

Dann gibt es genau eine Interpretation D von IL über U derart, daß $D/(IK^1 \circ PK) = D_0$.

Bew: Durch 2) und 4.7,3) ist festgelegt, wie Sequenzen von Individuenkonstanten zu interpretiert sind. Dadurch und durch 4.7,6) wird eindeutig eine Basisgleichungsbewertung induziert, und durch 3) und 4.7,7) eine mit ihr verträgliche Bewertung der Basissätze. Nach 4.10 wird damit die Bewertung von ganz SL festgelegt. 4.7,8) und 4.7,9) bestimmen dann die Interpretation der komplexen Prädikat- bzw semantisch sinnvollen nichttrivialen Individuenausdrücke.

4.13 Bem: Sei S e SL , c,k e IK und m e $\mathbb{N}$.
c komme in S an der Stelle m vor .
Sei B eine Bewertung von SL.

Falls B(c=k)=w,dann ist
$B((S_k^m))=B(S)$.

Bew: Der Beweis ist durch eine analoge Induktion wie in 4.10 zu führen.
Wir bemerken zum Induktionsanfang:
Falls S eine Basisgleichung ist,folgt die Behauptung daraus,daß B/BG nach 4.3 eine Basisgleichungsbewertung ist.
Falls S ein Basissatz ist,folgt die Behauptung aus dem Umstand,daß sie für Basisgleichungen gültig ist und daß B/BS nach 4.3 mit B/BG verträglich ist.

4.14 Beh: Sei I^ne n-IL mit $Name(I^n)\neq 0$

1) Für $k_1,..,k_n$e IK gilt:

$1kp(I^n)k_1..k_n \doteq I^n=k_1..k_n$

2) $Ex_1..x_n\ 1kp(I^n)x_1..x_n \doteq Ex_1..x_n\ I^n=x_1..x_n$

Bew: 2) folgt aus 1)
Seien also $k_1,..,k_n$eIK und B eine Bewertung von SL.
Falls $B(1kp(I^n)k_1..k_n)=w$
Dann $B(Ex_1..x_n\ 1kp(I^n)x_1..x_n)=w$
Außerdem nach Definition von 1kp und 4.3,6b)
$B(Ax_1..x_n(kp(I^n)x_1..x_n \dashv k_1..k_n=x_1..x_n))=w$
Deshalb nach 4.3,8) $B(I^n=k_1..k_n)=w$
Falls umgekehrt $B(I^n=k_1..k_n)=w$.
Dann nach 4.3,8)
(I) $B(Ex_1..x_n\ 1kp(I^n)x_1..x_n)=w$ und
(II)$B((Ax_1..x_n(kp(I^n)x_1..x_n \dashv k_1..k_n=x_1..x_n))=w$
Wegen (I) gibt es ein $(c_1,..,c_n)$eIK^n so,daß
(III) $B(1kp(I^n)c_1..c_n)=w$ und insbesondere
(IV) $B(kp(I^n)c_1..c_n)=w$ .Wegen (II) ist dann
$B(k_1..k_n=c_1..c_n)=w$ also für $1\leq i\leq n$
$B(k_i=c_i)=w$
Nach (III) und 4.13 ist dann $B(1kp(I^n)k_1..k_n)=w$
Insgesamt ist also $B(1kp(I^n)k_1..k_n)=B(I^n=k_1..k_n)$.

4.15 Beh: Sei S e SL, $c_1,..,c_n$ e IK, $v_1,..,v_n$ eIV jeweils paarverschieden. Für $1 \neq i \neq n$ sei c_i in S durch v_i substituierbar und es sei I^n e n-IL mit $Name(I^n) \neq 0$

1) $(Av_1.v_n(S^{c_1 \cdot c_n}_{v_1 \cdot v_n}) \& Ex_1.x_n 1kp(I^n)x_1.x_n)$ L $Lv_1.v_n(S^{c_1 \cdot c_n}_{v_1 \cdot v_n})I^n$

2) $Lv_1.v_n(S^{c_1 \cdot c_n}_{v_1 \cdot v_n})I^n$ L $(Ev_1.v_n(S^{c_1 \cdot c_n}_{v_1 \cdot v_n}) \& Ex_1.x_n 1kp(I^n)x_1.x_n)$

Bew: Sei B eine Bewertung von SL

1) Falls (I) $B(Av_1.v_n(S^{c_1 \cdot c_n}_{v_1 \cdot v_n}))=w$ und

(II) $B(Ex_1.x_n 1kp(I^n)x_1.x_n)=w$

Dann ist wegen (I) auch

(III) $B(Av_1.v_n(kp(I^n)v_1.v_n \leftarrow (S^{c_1 \cdot c_n}_{v_1 \cdot v_n})))=w$ und

(IV) $B(Ax_1.x_n(kp(I^n)x_1.x_n \leftarrow Lv_1.v_n(S^{c_1 \cdot c_n}_{v_1 \cdot v_n})x_1.x_n))=w.$

Wegen (II) und (IV) ist nach 4.3,7) ist dann

$B(Lv_1..v_n(S^{c_1 \cdot c_n}_{v_1 \cdot v_n})I^n)=w$

2) zeigt man dual zu 1).

Aus einem Allsatz folgt also jede Spezialisierung auf einen (passenden) semantisch sinnvollen Individuenausdruck.

Aus 4.3,6b) und 4.3,7) wird ersichtlich, daß i- und L-Operatoren schrittweise eliminierbar sind.

5. 3-WERTIGE SEMANTIK

In unserer 3-wertigen Semantik betrachten wir das Falsche nicht mehr einfach als Komplement des Wahren,sondern als weiteren Grundbegriff,von dem wir lediglich voraussetzen, daß er disjunkt zum Begriff des Wahren ist,nicht aber,daß jeder Satz bivalent, dh wahr oder in diesem neuen Sinne falsch ist.Nicht-bivalente Sätze wollen wir als unbestimmt bezeichnen.

Dann können wir für Sätze S_1,S_2 zunächst informell definieren:

S_1 ist eine BIVALENZPRÄSUPPOSITION VON S_2 gdw
in jeder Situation,in der S_1 nicht wahr ist,S_2 nicht bivalent ist.
S_1 ist TOTALE BIVALENZPRÄSUPPOSITION VON S_2 gdw
in jeder Situation S_2 genau dann bivalent ist,wenn S_1 wahr ist.

S_1 FOLGT AUS S_2 gdw
S_1 in jeder Situation wahr ist,in der S_2 wahr ist.

S_1 ist mit S_2 ÄQUIVALENT gdw
in jeder Situation S_1 genau dann wahr ist,wenn S_2 wahr ist.

Daraus ergibt sich unmittelbar,
daß,falls sowohl S_0 als auch S_1 totale Bivalenzpräsupposition von S_2 sind,S_0 und S_1 äquivalent sein müssen.
Außerdem gilt,daß,falls S_0 totale Bivalenzpräsupposition von S_2 ist,S_1 eine Bivalenzpräsupposition von S_2 ist genau dann, wenn S_1 aus S_0 folgt.
Denn falls S_0 totale Bivalenzpräsupposition von S_2 und S_1 eine Bivalenzpräsupposition davon,und falls S_0 in einer Situation wahr ist,dann ist in dieser Situation S_2 bivalent und deshalb S_1 wahr.
Falls andererseits S_0 totale Bivalenzpräsupposition von S_2 ist und S_1 aus S_0 folgt,und falls in einer Situation S_1 nicht wahr ist,dann ist in dieser Situation auch S_0 nicht wahr und deshalb S_2 nicht bivalent.

Der Begriff der totalen Bivalenzpräsupposition hat also die angenehme Eigenschaft,daß es bis auf Äquivalenz höchstens eine totale Bivalenzpräsupposition eines Satzes geben kann und daß, falls es so eine gibt,genau die Folgerungen daraus Bivalenzpräsuppositionen des Satzes sind.

Die Eindeutigkeit bis auf Äquivalenz macht es sinnvoll, den Sätzen von SL durch eine Funktion ihre totale Bivalenzpräsupposition zuordnen zu wollen.
Es eröffnen sich folgende definitorische Möglichkeiten:

5.1 Def: Sei P e SL^{SL} und B eine Bewertung von SL. Dann sei B_P e $\{w,f,u\}^{SL}$ definiert durch:

Für S e SL sei $B_P(S)=B(S)$, falls $B(P(S))=w$
u , sonst.

B_P deutet P(S) als totale Bivalenzpräsupposition von S und bewertet S genau dann bivalent, wenn $B(P(S))=w$
Jede Funktion P e SL^{SL} induziert also in der dargestellten Weise 3-wertige Bewertungen von SL. Dabei gilt:

5.2 Bem: Sei P e SL^{SL}, B eine Bewertung von SL und S e SL.

1) $B_P(S)=w$ gdw $B(S)=w$ und $B(P(S))=w$
2) $B_P(S)=f$ gdw $B(S)=f$ und $B(P(S))=w$
3) $B_P(S)=u$ gdw $B(P(S))=f$

5.3 Def: Sei P e SL^{SL}, S,S_1,S_2 e SL

1) S heißt P-LOGISCH WAHR, in Zeichen L_PS, gdw für alle Bewertungen B von SL $B_P(S)=w$
2) S_2 FOLGT P-LOGISCH AUS S_1, in Zeichen $S_1L_PS_2$, gdw für alle Bewertungen B von SL mit $B_P(S_1)=w$ auch $B_P(S_2)=w$

Jede Funktion P e SL^{SL} induziert also eine 3-wertige Semantik. Die Begriffe der P-logischen Wahrheit und Folgerung stehen zu den 2-wertigen Begriffen in sehr durchsichtiger Relation:

5.4 Beh: Sei P e SL^{SL}, S,S_1,S_2 e SL

1) L_PS gdw $L(S\&P(S))$
2) $S_1L_PS_2$ gdw $(S_1\&P(S_1))\ L\ (S_2\&P(S_2))$

Bew:

Die Behauptung folgt direkt aus 5.2,1) und 5.3.

1) L_P S gdw für alle Bewertungen B von SL $B_P(S)=w$ gdw(nach 5.2,1)) für alle Bewertungen B von SL $B(S)=w$ und $B(P(S))=w$.
2) analog

Diese grundlegend einfachen Beziehungen lassen es als lohnend erscheinen, 3-wertige Semantik in der beschriebenen Weise mithilfe bestimmter Funktionen P e SL^{SL} zu betreiben.

Relativ zu einer Funktion P e SL^{SL} läßt sich auch der Begriff der Bivalenzpräsupposition formal definieren:

5.5 Def: Sei P e SL^{SL}, S_1, S_2 e SL.
S_1 heißt eine BIVALENZPRÄSUPPOSITION VON S_2 BEZÜGLICH P, in Zeichen $S_1 BP_P S_2$, gdw für alle Bewertungen B von SL gilt:
falls $B_P(S_1) \neq w$, dann $B_P(S_2) = u$

Für bestimmte Funktionen P e SL^{SL} besteht der in den einleitenden Bemerkungen dargestellte Zusammenhang zwischen den Begriffen der Bivalenzpräsupposition und der totalen Bivalenzpräsuppostion.

5.6 Beh: Sei P e SL^{SL} so, daß für alle S e SL gilt: P(S) L P(P(S)). Dann gilt

1) Für S_1, S_2 e SL
S_1 BP_P S_2 gdw $P(S_2)$ L_P S_1

2) Für S e SL und alle Bewertungen B von SL:
$B_P(S) \neq u$ gdw $B_P(P(S)) = w$

Bew: Gelte(I) P(S) L P(P(S)) für alle S e SL
Sei B eine Bewertung von SL

1) Falls nun $S_1 BP_P S_2$
und $B_P(S_1) \neq w$, dann nach 5.5 $B_P(S_2) = u$. Dann nach 5.2,3) $B(P(S_2)) = f$. Dann nach 5.2,1) $B_P(P(S_2)) \neq w$
Falls also $S_1 BP_P S_2$, dann $P(S_2)$ L_P S_1.
Falls umgekehrt $P(S_2)$ L_P S_1,
dann nach 5.4,2) $(P(S_2) \& P(P(S_2)))$ L $(S_1 \& P(S_1))$,
und wegen (I) also (II) $P(S_2)$ L $(S_1 \& P(S_1))$.
Falls nun $B_P(S_1) \neq w$, dann wegen 5.2,1)
$B(S_1) \neq w$ oder $B(P(S_1)) \neq w$ und wegen (II) dann
$B(P(S_2)) \neq w$, daher nach 5.2,3) $B_P(S_2) = u$.
Falls also $P(S_2)$ L_P S_1, dann S_1 BP_P S_2

2) Falls $B_P(S) \neq u$, dann nach 5.2,3) $B(P(S)) = w$,
dann wegen (I) $B(P(P(S))) = w$ und dann nach 5.2,1) $B_P(P(S)) = w$.
Falls umgekehrt $B_P(P(S)) = w$, dann nach 5.2,1) insbesondere $B(P(S)) = w$ und deshalb nach 5.2,3) $B_P(S) \neq u$.

Nach 5.6,1) sind also genau die P-logischen Folgerungen von $P(S_2)$ Bivalenzpräsuppositionen von S_2 bezüglich P, falls P(S) L P(P(S)) für alle S e SL.

Und P(S) besitzt in diesem Fall die charakteristische Eigenschaft von totalen Bivalenzpräsuppositionen, wie aus 5.6,2) hervorgeht.
Es gilt nämlich nicht allgemein, daß $B_P(S)\neq u$ gdw $B_P(P(S))=w$. Denn falls $B(P(S))=w$ und $B(P(P(S))\neq w$, dann zwar $B_P(S)\neq u$, aber $B_P(P(S))\neq w$.

Wir definieren also:

5.7 Def: Sei P e SL^{SL}
P heißt eine PRÄSUPPOSITIONSFUNKTION gdw
für alle S e SL gilt: P(S) L P(P(S))

Dies entspricht auch der Transitivität der Relation "Bivalenzpräsupposition" und dem Umstand, daß die totale Bivalenzpräsupposition ja eine maximale Bivalenzpräsupposition ist.

5.8 Def: Sei P e SL^{SL}.
P heißt eine KONSERVATIVE PRÄSUPPOSITIONSFUNKTION
gdw für alle S e SL gilt: S L P(S)

5.9 Bem: Sei P e SL^{SL} eine konservative Präsuppositionsfunktion
1) Dann ist P eine Präsuppositionsfunktion
2) Für alle S e SL ist
(a) $B_P(S)=w$ gdw $B(S)=w$
(b) $B_P(S)=f$ gdw $B(S)=f$ und $B(P(S))=w$
(c) $B_P(S)=u$ gdw $B(S)=f$ und $B(P(S))=f$
3) Für S, S_1, S_2 e SL gilt:
(a) L_P S gdw L S
(b) $S_1 L_P S_2$ gdw S_1 L S_2
4) Für S_1, S_2 e SL ist
S_1 BP_P S_2 gdw $P(S_2)$ L S_1

Bew:
1) ist klar
2) folgt aus 5.2 und daraus, daß S L P(S) für SeSL
3) folgt aus 5.4
4) folgt aus 1), 5.6,1) und aus 3b)

Funktionen P e SL^{SL} mit S L P(S) für SeSL nennen wir konservative Präsuppositionsfunktionen, weil sie nach 5.9,1) erstens Präsuppositionsfunktionen sind und außerdem nach 5.9,2) durch sie der Begriff des 2-wertig Wahren unverändert bleibt, also nur das 2-wertig Falsche differenziert wird in das 3-wertige Falsche und das 3-wertig Unbestimmte.

Und zwar ist ein 2-wertig falscher Satz 3-wertig falsch genau dann,wenn seine totale Bivalenzpräsupposition wahr ist, und sonst unbestimmt,wie aus 5.9,2) hervorgeht.
Eben weil konservative Präsuppositionsfunktionen bezüglich der 2-wertigen Wahrheit konservativ sind,induzieren sie nach 5.9,3) Semantiken,in denen die Begriffe der logischen Wahrheit und Folgerung mit den 2-wertigen Begriffen übereinstimmen.
5.9,4) besagt schließlich,daß für eine konservative Präsuppositionsfunktion P die Bivalenzpräsuppositionen eines Satzes S_2 bezüglich P gerade die 2-wertigen logischen Folgerungen aus $P(S_2)$ sind.
Außerdem muß,vorausgesetzt,daß die 2-wertige Semantik im Hinblick auf präsuppositionale Phänomene nicht inadäquat ist, ohnehin gelten,daß S L P(S),wenn man P(S) als totale Bivalenzpräsupposition von S deuten können will.
Dies läßt zunächst allein die konservativen Präsuppositionsfunktionen als der Beachtung würdig erscheinen.

Wenn wir trotzdem den allgemeineren Begriff der Präsuppositionsfunktion gesondert definiert haben,so liegt das daran, daß wir im folgenden spezielle Präsuppositionsfunktionen betrachten werden und sehen,daß auch nicht-konservative Präsuppositionsfunktionen interessante 3-wertige Semantiken induzieren.

6. PRÄSUPPOSITIONSFUNKTIONEN

Wir werden nun einige spezielle Präsuppositionsfunktionen angeben. Für deren Definition verwenden wir folgende Rekursionsschemata:

Für C^n e n-PK und $c_1,..,c_n$ eIK sei

R(BS) $P(C^n c_1..c_n) = c_1..c_n = c_1..c_n$

Für $c_1,..,c_n, k_1,..,k_n$ eIK sei

R(BG) $P(c_1.c_n = k_1.k_n) = c_1.c_n k_1.k_n = c_1.c_n k_1.k_n$

Für S e SL sei

R1(-) $P(-S) = P(S)$

R2(-) $P(-S) = (P(S) v -S)$

Für $S_1,..,S_n$ e SL mit $2 \neq n$ sei

R1(&) $P((S_1 \& .. \& S_n)) = (P(S_1) \& .. \& P(S_n))$

R2(&) $P((S_1 \& .. \& S_n)) = ((P(S_1) \& .. \& P(S_n)) v (-S_1 \& P(S_1)) v .. v (-S_n \& P(S_n)))$

R3(&) $P((S_1 \& .. \& S_n)) = (P(S_1) v .. v P(S_n))$

R1(v) $P((S_1 v .. v S_n)) = (P(S_1) v .. v P(S_n))$

R2(v) $P((S_1 v .. v S_n)) = ((P(S_1) \& .. \& P(S_n)) v (S_1 \& P(S_1)) v .. v (S_n \& P(S_n)))$

R3(v) $P((S_1 v .. v S_n)) = (P(S_1) \& .. \& P(S_n))$

Für S_1, S_2 e SL sei

R(+) $P((S_1 + S_2)) = P((-S_1 v S_2))$

Für S e SL, jeweils paarverschiedene $c_1,..,c_n$ eIK und $v_1,..,v_n$ eIV derart, daß für $1 \neq i \neq n$ c_i in S durch v_i substituierbar ist, und für $k_1,..,k_n$ eIK sei, falls $m = \max\{i \text{ e } \mathbb{N} / x_i \text{ oder } y_i \text{ kommt in S oder P(S) vor}\}, w_i = x_{m+i}$

R1(A) $P(Av_1..v_n(S^{c_1 \cdot .. \cdot c_n}_{v_1 \cdot .. \cdot v_n})) = Aw_1..w_n(P(S)^{c_1 \cdot .. \cdot c_n}_{w_1 \cdot .. \cdot w_n})$

R2(A) $P(Av_1..v_n(S^{c_1 \cdot .. \cdot c_n}_{v_1 \cdot .. \cdot v_n})) = (Aw_1..w_n(P(S)^{c_1 \cdot .. \cdot c_n}_{w_1 \cdot .. \cdot w_n}) v Ew_1..w_n((-S \& P(S))^{c_1 \cdot .. \cdot c_n}_{w_1 \cdot .. \cdot w_n}))$

R3(A) $P(Av_1..v_n(S^{c_1 \cdot .. \cdot c_n}_{v_1 \cdot .. \cdot v_n})) = Ew_1..w_n(P(S)^{c_1 \cdot .. \cdot c_n}_{w_1 \cdot .. \cdot w_n})$

R1(E) $P(Ev_1..v_n(S^{c_1 \cdot .. \cdot c_n}_{v_1 \cdot .. \cdot v_n})) = Ew_1..w_n(P(S)^{c_1 \cdot .. \cdot c_n}_{w_1 \cdot .. \cdot w_n})$

R2(E) $P(Ev_1..v_n(S^{c_1 \cdot .. \cdot c_n}_{v_1 \cdot .. \cdot v_n})) = (Aw_1..w_n(P(S)^{c_1 \cdot .. \cdot c_n}_{w_1 \cdot .. \cdot w_n}) v Ew_1..w_n((S \& P(S))^{c_1 \cdot .. \cdot c_n}_{w_1 \cdot .. \cdot w_n}))$

R3(E) $P(Ev_1..v_n(S^{c_1 \cdot .. \cdot c_n}_{v_1 \cdot .. \cdot v_n})) = Aw_1..w_n(P(S)^{c_1 \cdot .. \cdot c_n}_{w_1 \cdot .. \cdot w_n})$

R(L) $P(Lv_1..v_n(S^{c_1 \cdot .. \cdot c_n}_{v_1 \cdot .. \cdot v_n}) k_1.k_n) = P((S^{c_1 \cdot .. \cdot c_n}_{k_1 \cdot .. \cdot k_n}))$

Für P^ne n-PL und I^ne n-IL mit Name$(I^n)\neq 0$ sei

R(I^m) $P(P^nI^n)=(Ex_1.x_n 1kp(I^n)x_1.x_n \& P(Ex_1.x_n 1kp(I^n)x_1.x_n)\&$
$P(Ax_1.x_n(kp(I^n)x_1.x_n \leftarrow P^n x_1.x_n)))$

Für I_1^n, I_2^ne n-IL mit Name$(I_1^n)\neq 0$ oder Name$(I_2^n)\neq 0$ sei

R(=) falls Name$(I_1^n)\neq 0$
$P(I_1^n=I_2^n)=(Ex_1.x_n 1kp(I_1^n)x_1.x_n \& P(Ex_1.x_n 1kp(I_1^n)x_1.x_n)\&$
$P(Ax_1.x_n(kp(I_1^n)x_1.x_n \leftarrow I_2^n=x_1.x_n)))$

und sonst sei $P(I_1^n=I_2^n)=P(I_2^n=I_1^n)$

6.1 Beh: Sei P e SL^{SL} , B eine Bewertung von SL

1) Falls C^ne n-PK, $c_1,..,c_n$eIK und R(BS) für P gilt, ist
$B_P(C^n c_1..c_n)=B(C^n c_1..c_n)$

2) Falls $c_1,..,c_n, k_1,..,k_n$eIK und R(BG) für P gilt, ist
$B_P(c_1.c_n=k_1.k_n)=B(c_1.c_n=k_1.k_n)$

3) Falls S e SL und

a) R1(-) für P gilt, ist
$B_P(-S)=w$ gdw $B_P(S)=f$
$B_P(-S)=f$ gdw $B_P(S)=w$
$B_P(-S)=u$ gdw $B_P(S)=u$

b) R2(-) für P gilt und S L P(S), ist
$B_P(-S)=w$ gdw $B_P(S)\neq w$
$B_P(-S)=f$ gdw $B_P(S)=w$
also in keinem Fall $B_P(-S)=u$

4) Falls $S_1,..,S_n$e SL mit $2 \neq n$ und

a) R1(&) für P gilt, ist
$B_P((S_1\&..\&S_n))=w$ gdw für alle i $B_P(S_i)=w$
$B_P((S_1\&..\&S_n))=u$ gdw für mind ein i $B_P(S_i)=u$

b) R2(&) für P gilt, ist
$B_P((S_1\&..\&S_n))=w$ gdw für alle i $B_P(S_i)=w$
$B_P((S_1\&..\&S_n))=f$ gdw für mind ein i $B_P(S_i)=f$

c) R3(&) für P gilt und für $1 \neq i \neq n$ S_iL P(S_i), ist
$B_P((S_1\&..\&S_n))=w$ gdw für alle i $B_P(S_i)=w$
$B_P((S_1\&..\&S_n))=u$ gdw für alle i $B_P(S_i)=u$

d) R1(v) für P gilt und für $1 \neq i \neq n$ S_iL P(S_i), ist
$B_P((S_1 v..v S_n))=w$ gdw für mind ein i $B_P(S_i)=w$
$B_P((S_1 v..v S_n))=u$ gdw für alle i $B_P(S_i)=u$

e) R2(v) für P gilt,ist

$B_P((S_1 v .. v S_n))=w$ gdw für mind ein i $B_P(S_i)=w$

$=f$ für alle i $B_P(S_i)=f$

f) R3(v) für P gilt,ist

$B_P((S_1 v .. v S_n))=u$ gdw für mind ein i $B_P(S_i)=u$

$=f$ für alle i $B_P(S_i)=f$

5) Falls $S_1, S_2 e$ SL und R(←) für P gilt,ist

$B_P((S_1 \leftarrow S_2))=B_P((\neg S_1 v S_2))$

6) Falls S e SL ,$c_1,.,c_n e$IK und $v_1,.,v_n e$IV jeweils paarverschieden,für $1 \neq i \neq n$ c_i in S durch v_i substituierbar, falls weiter

(I) alle c_i auch in P(S) vorkommen und

(II) für alle $(k_1,.,k_n) e IK^n$ $P((S^{c_1 \cdot c_n}_{k_1 \cdot k_n}))=(P(S)^{c_1 \cdot c_n}_{k_1 \cdot k_n})$

a) und R1(A) für P gilt,ist

$B_P(Av_1 . v_n(S^{c_1 \cdot c_n}_{v_1 \cdot v_n}))=w$ gdw für alle $(k_1,.,k_n) e IK^n$ $B_P((S^{c_1 \cdot c_n}_{k_1 \cdot k_n}))=w$

$=u$ gdw für mind ein $(k_1,.,k_n) e IK^n$ $B_P((S^{c_1 \cdot c_n}_{k_1 \cdot k_n}))=u$

b) und R2(A) für P gilt,ist

$B_P(Av_1 . v_n(S^{c_1 \cdot c_n}_{v_1 \cdot v_n}))=w$ gdw für alle $(k_1,.,k_n) e IK^n$ $B_P((S^{c_1 \cdot c_n}_{k_1 \cdot k_n}))=w$

$=f$ gdw für mind ein $(k_1,.,k_n) e IK^n$ $B_P((S^{c_1 \cdot c_n}_{k_1 \cdot k_n}))=f$

c) und R3(A) für P gilt,und für alle $(k_1,.,k_n) e IK^n$ $(S^{c_1 \cdot c_n}_{k_1 \cdot k_n})$ L $P((S^{c_1 \cdot c_n}_{k_1 \cdot k_n}))$,ist

$B_P(Av_1 . v_n(S^{c_1 \cdot c_n}_{v_1 \cdot v_n}))=w$ gdw für alle $(k_1,.,k_n) e IK^n$ $B_P((S^{c_1 \cdot c_n}_{k_1 \cdot k_n}))=w$

$=u$ gdw für alle $(k_1,.,k_n) e IK^n$ $B_P((S^{c_1 \cdot c_n}_{k_1 \cdot k_n}))=u$

d) und R1(E) für P gilt und für alle $(k_1,.,k_n) e IK^n$ $(S^{c_1 \cdot c_n}_{k_1 \cdot k_n})$ L $P((S^{c_1 \cdot c_n}_{k_1 \cdot k_n}))$,ist

$B_P(Ev_1 . v_n(S^{c_1 \cdot c_n}_{k_1 \cdot k_n}))=w$ gdw für mind ein $(k_1,.,k_n) e IK^n$ $B_P((S^{c_1 \cdot c_n}_{k_1 \cdot k_n}))=w$

$B_P(Ev_1.v_n(S^{c_1\cdot c_n}_{v_1\cdot v_n}))=u$ gdw für alle $(k_1,..,k_n)eIK^n$
$B_P((S^{c_1\cdot c_n}_{k_1\cdot k_n}))=u$

e) und R2(E) für P gilt,ist
$B_P(Ev_1.v_n(S^{c_1\cdot c_n}_{v_1\cdot v_n}))=w$ gdw für mind ein $(k_1,..,k_n)eIK^n$
$B_P((S^{c_1\cdot c_n}_{k_1\cdot k_n}))=w$
$=f$ gdw für alle $(k_1,..,k_n)eIK^n$
$B_P((S^{c_1\cdot c_n}_{k_1\cdot k_n}))=f$

f) und R3(E) für P gilt,ist
$B_P(Ev_1.v_n(S^{c_1\cdot c_n}_{v_1\cdot v_n}))=u$ gdw für mind ein $(k_1,..,k_n)eIK^n$
$B_P((S^{c_1\cdot c_n}_{k_1\cdot k_n}))=u$
$=f$ gdw für alle $(k_1,..,k_n)eIK^n$
$B_P((S^{c_1\cdot c_n}_{k_1\cdot k_n}))=f$

7) Fall S e SL,$c_1,..,c_n$eIK und $v_1,..,v_n$eIV jeweils paarverschieden,für $1\neq i\neq n$ c_i in S durch v_i substituierbar ,und $k_1,..,k_n$eIK,und R(L) für P gilt,ist
$B_P(Lv_1.v_n(S^{c_1\cdot c_n}_{v_1\cdot v_n})k_1.k_n)=B_P((S^{c_1\cdot c_n}_{k_1\cdot k_n}))$

8) Falls P^ne n-PL und I^ne n-IL mit $Name(I^n)\neq 0$ und $R(I^m)$ für P gilt,ist
$B_P(P^nI^n)=w$ gdw $B_P(Ex_1.x_n1kp(I^n)x_1.x_n)=w$ und
$B_P(Ax_1.x_n(kp(I^n)x_1.x_n\rightarrow P^nx_1.x_n))=w$
$=f$ gdw $B_P(Ex_1.x_n1kp(I^n)x_1.x_n)=w$ und
$B_P(Ax_1.x_n(kp(I^n)x_1.x_n\rightarrow P^nx_1.x_n))=f$

9) Falls I^n_1,I^n_2e n-IL mit $Name(I^n_1)\neq 0$ oder $Name(I^n_2)\neq 0$ und R(=) für P gilt ,ist
falls $Name(I^n_1)\neq 0$
$B_P(I^n_1=I^n_2)=w$ gdw $B_P(Ex_1.x_n1kp(I^n_1)x_1.x_n)=w$ und
$B_P(Ax_1.x_n(kp(I^n_1)x_1.x_n\rightarrow I^n_2=x_1.x_n))=w$
$=f$ gdw $B_P(Ex_1.x_n1kp(I^n_1)x_1.x_n)=w$ und
$B_P(Ax_1.x_n(kp(I^n_1)x_1.x_n\rightarrow I^n_2=x_1.x_n))=f$
und sonst ist $B_P(I^n_1=I^n_2)=B_P(I^n_2=I^n_1)$

Bew: Sei P e SL^{SL} und B eine Bewertung von SL

1) und 2) folgen aus 5.1

3) Sei S e SL.Dann gilt

a) $B_P(-S)=w$ gdw $\big($ $B(-S)=w$ und $B(P(-S))=w\big)$ gdw
$\big(B(S)=f$ und $B(P(S))=w\big)$ gdw $B_P(S)=f$
$B_P(-S)=f$ gdw $B(-S)=f$ und $B(P(-S))=w$ gdw
$B(S)=w$ und $B(P(S))=w$ gdw $B_P(S)=w$.

falls R1(-) für P gilt.

b) falls R2(-) für P gilt und S L P(S)
$B_P(-S)=u$ gdw $B(P(-S))=f$ gdw $B((P(S)v-S))=f$,
also nie,da S L P(S)
$B_P(-S)=f$ gdw $B(-S)=f$ und $B(P(-S))=w$ gdw
$B(S)=w$ und $B((P(S)v-S))=w$ gdw $B(S)=w$ und $B(P(S))=w$
gdw $B_P(S)=w$.
Damit ist auch schon der Rest der Behauptung gezeigt

4) Seien $S_1,..,S_n$ e SL mit $2 \neq n$ und gelte für P

a) R1(&).Dann ist
$B_P((S_1\&..\&S_n))=w$ gdw $B((S_1\&..\&S_n))=w$ und $B(P((S_1\&.\&S_n)))=w$
gdw für alle i $B(S_i)=w$ und $B(P(S_i))=w$ gdw für alle i
$B_P(S_i)=w$.
$B_P((S_1\&..\&S_n))=u$ gdw $B(P((S_1\&..\&S_n))=f$ gdw
für mind ein i $B(P(S_i))=f$ gdw für mind ein i
$B_P(S_i)=f$

b) R2(&).dann ist
$B_P((S_1\&..\&S_n))=w$ gdw $B((S_1\&..\&S_n))=w$ und
$B(((P(S_1)\&.\&P(S_n))v(-S_1\&P(S_1))v.v(-S_n\&P(S_n))))=w$
gdw $B((S_1\&..\&S_n))=w$ und $B((P(S_1)\&.\&P(S_n)))=w$ gdw
$B_P((S_1\&..\&S_n))=w$.
Falls $B_P((S_1\&..\&S_n))=f$,dann $B((S_1\&.\&S_n))=f$ und (I)
$B(P((S_1\&..\&S_n))=w$.Dann für mind ein i $B(S_i)=f$.
Wegen (I) ist nun für alle j $B(P(S_j))=w$ oder
für mind ein j $B(S_j)=f$ und $B(P(S_j))=w$.
in jedem Fall gibt es ein i so,daß $B(S_i)=f$ und
$B(P(S_i))=w$,daß also $B_P(S_i)=f$.
Falls umgekehrt für ein i $B_P(S_i)=f$,dann $B(S_i)=f$
und $B(P(S_i))=w$.Dann $B((S_1\&.\&S_n))=f$ und
$B(P((S_1\&..\&S_n)))=w$,also $B_P((S_1\&..\&S_n))=f$.

c) R3(&) und gelte für $1 \leq i \leq n$, da+ $S_i L P(S_i)$. Dann
$B_P((S_1\&..\&S_n))=u$ gdw $B(P((S_1\&..\&S_n))=f$ gdw
für alle i $B(P(S_i))=f$ gdw für alle i $B_P(S_i)=u$.
Falls $B_P((S_1\&..\&S_n))=w$, dann für alle i
$B(S_i)=w$ und, da $S_i L P(S_i)$, auch $B(P(S_i))=w$, also
$B_P(S_i)=w$.
Falls umkekehrt für alle i $B_P(S_i)=w$, dann
$B((S_1\&..\&S_n))=w$ und $B(P((S_1\&..\&S_n)))=w$, also
$B_P((S_1\&..\&S_n))=w$

d) R1(v) und gelte für $1 \leq i \leq n$ $S_i L P(S_i)$. Dann
$B_P((S_1v..vS_n))=u$ gdw $B(P((S_1v..vS_n)))=f$ gdw
für alle i $B(P(S_i))=f$ gdw für alle i $B_P(S_i)=u$.
Falls $B_P((S_1v.vS_n))=w$, dann für mind ein i
$B(S_i)=w$, und weil $S_i L P(S_i)$ auch $B(P(S_i))=w$ also
$B_P(S_i)=w$.
Falls umgekehrt für ein i $B_P(S_i)=w$, dann $B(S_i)=w$
und $B(P(S_i))=w$, also $B((S_1v..vS_n))=w$ und
$B(P((S_1v..vS_n)))=w$, also $B_P((S_1v..vS_n))=w$

e) R2(v). Dann ist
$B_P((S_1v.vS_n)=f$ gdw $B((S_1v.vS_n))=f$ und $B(P((S_1v.vS_n)))=w$
gdw für alle i $B(S_i)=f$ und $B(P(S_i))=f$ gdw für alle
i $B_P(S_i)=f$.
Falls $B_P((S_1v.vS_n))=w$, dann $B((S_1v.vS_n))=w$ und
(I) $B(P((S_1v.vS_n)))=w$. Dann für mind ein i
$B(S_i)=w$ und wegen (I) für alle j $B(P(S_j))=w$ oder
für mind ein j $B(S_j)=w$ und $B(P(S_j))=w$.
In jedem Fall für mind ein i $B(S_i)=w$ und $B(P(S_i))=w$,
also $B_P(S_i)=w$.
Falls umgekehrt für ein i $B_P(S_i)=w$, dann $B(S_i)=w$ und
$B(P(S_i))=w$, dann $B((S_1v.vS_n))=w$ und $B(P((S_1v.vS_n)))=w$,
also $B_P((S_1v.vS_n))=w$

f) R3(v). Dann ist
$B_P((S_1v.vS_n))=u$ gdw $B(P((S_1v.vS_n)))=f$ gdw für mind
ein i $B(P(S_i))=f$ gdw für mind ein i $B_P(S_i)=u$.
$B_P((S_1v.vS_n))=f$ gdw $B((S_1v.vS_n))=f$ und $B(P((S_1v.vS_n)))=w$
gdw für alle i $B(S_i)=f$ und $B(P(S_i))=w$, also $B_P(S_i)=f$.

5) folgt aus 4.3,5) und 5.1

6) Sei S e SL, $c_1,..,c_n$ e IK , $v_1,..,v_n$ e IV jeweils paarverschieden, c_i in S durch v_i substituierbar.
Gelte weiter, daß (I) alle c_i in P(S) vorkommen und
(II) für alle $(k_1,..,k_n)eIK^n$ $P((S^{c_1\cdot c_n}_{k_1\cdot k_n}))=(P(S)^{c_1\cdot c_n}_{k_1\cdot k_n})$
Die Überlegungen für All- und Existenzsatz sind an sich dieselben wie für Konjunktion und Disjunktion. Wir zeigen nur an einem Fall die Bedeutung der Voraussetzungen (I) und (II).

a) gelte für P R1(A).
(I) ist Voraussetzung dafür, daß R1(A) überhaupt für P gelten kann. Denn kämen nicht die c_i in P(S) vor, so wäre $Aw_1.w_n(P(S)^{c_1\cdot c_n}_{w_1\cdot w_n})$ kein Satz von IL.
Falls andererseits die c_i in P(S) vorkommen, ist ein Satz von IL, denn die w_i sind so gewählt, daß sie in P(S) nicht vorkommen und daher c_i in P(S) durch w_i substituierbar ist.
$B_P(Av_1.v_n(S^{c_1\cdot c_n}_{v_1\cdot v_n}))=w$ gdw $B(Av_1.v_n(S^{c_1\cdot c_n}_{v_1\cdot v_n}))=w$ und
$B(Aw_1.w_n(P(S)^{c_1\cdot c_n}_{w_1\cdot w_n}))=w$ gdw für alle $(k_1,..,k_n)eIK^n$
$B((S^{c_1\cdot c_n}_{k_1\cdot k_n}))=w$ und $B(P(S)^{c_1\cdot c_n}_{k_1\cdot k_n}))\overset{(II)}{=} B(P((S^{c_1\cdot c_n}_{k_1\cdot k_n})))= w$
gdw für alle $(k_1,..,k_n)eIK^n$ $B_P((S^{c_1\cdot c_n}_{k_1\cdot k_n}))=w$.

7) folgt aus 4.3,6b7 und 5.1

8) Sei P^ne n-PL und I^ne n-IL mit $Name(I^n)\neq 0$ und gelte für P $R(I^m)$.
$B_P(P^nI^n)=w$ gdw $B(P^nI^n)=w$ und $B(P(P^nI^n))=w$ gdw
$B(Ex_1.x_n 1kp(I^n)x_1.x_n)=w=B(Ax_1.x_n(kp(I^n)x_1.x_n \leftarrow P^n x_1.x_n))=$
$B(P(Ex_1.x_n 1kp(I^n)x_1.x_n))=B(P(Ax_1.x_n(kp(I^n)x_1.x_n \leftarrow P^n x_1.x_n)))$
gdw $B_P(Ex_1.x_n 1kp(I^n)x_1.x_n)=w$ und
$B_P(Ax_1.x_n(kp(I^n)x_1.x_n \leftarrow P^n x_1.x_n))=w$
$B_P(P^nI^n)=f$ gdw $B(P^nI^n)=f$ und $B(P(P^nI^n))=w$ gdw
$B(Ax_1.x_n(kp(I^n)x_1.x_n \leftarrow P^n x_1.x_n)=f$ und
$B(Ex_1.x_n 1kp(I^n)x_1.x_n)=w=B(P(Ex_1.x_n 1kp(I^n)x_1.x_n))$ und
$B(P(Ax_1.x_n(kp(I^n)x_1.x_n \leftarrow P^n x_1.x_n)))=w$ gdw
$B_P(Ex_1.x_n 1kp(I^n)x_1.x_n)=w$ und
$B_P(Ax_1.x_n(kp(I^n)x_1.x_n \leftarrow P^n x_1.x_n))=f$

9) ist wie 8) zu zeigen.

6.2 Beh: Jede Auswahl aus den Rekursionsschemata, die neben $R(BS), R(BG), R(\dot{-}), R(L), R(I^m)$ und $R(=)$ genau ein Schema für die Zeichen $-, \&, v, A$ und E enthält, definiert eindeutig eine Funktion $P \in SL^{SL}$ so, daß

1) $c \in IK$ in $P(S)$ genau dann vorkommt, wenn c in S vorkommt
2) für paarverschiedene $c_1, .., c_n \in IK$ und $k_1, .., k_n \in IK$
$P((S^{c_1 \cdot c_n}_{k_1 \cdot k_n}))=(P(S)^{c_1 \cdot c_n}_{k_1, k_n})$

Bew: Es ist für $S \in SL$ durch Induktion nach dem transfiniten Grad von S zu zeigen, daß die Auswahl der Rekursionsschemata $P(S)$ eindeutig festlegt und außerdem die Punkte 1) und 2) gelten.
Wir betrachten nur die interessanten Teile der Induktion.
Gelte die Behauptung für alle Sätze von $\mathbb{L}$ mit kleinerem transfiniten Grad als $(n,m) \neq (0,0)$.
Sei $S \in SL$ mit $traGra(S)=(n,m)$.
Habe S die Gestalt $Av_1 \cdot v_n(S_1{}^{c_1 \cdot c_n}_{v_1 \cdot v_n})$
Enthalte die Auswahl etwa R1(A).

Falls nun $Av_1 \cdot v_n(S_1{}^{c_1 \cdot c_n}_{v_1 \cdot v_n})=Av_1 \cdot v_n(S_2{}^{k_1 \cdot k_n}_{v_1 \cdot v_n})$, dann ist $(S_1{}^{c_1 \cdot c_n}_{v_1 \cdot v_n})=(S_2{}^{k_1 \cdot k_n}_{v_1 \cdot v_n})$ und nach 2.12

(I) $S_2=(S_{2k_1 \cdot k_n}^{k_1 \cdot k_n})=(S_{1k_1 \cdot k_n}^{c_1 \cdot c_n})$ und $S_1=(S_{1c_1 \cdot c_n}^{c_1 \cdot c_n})=(S_{2c_1 \cdot c_n}^{k_1 \cdot k_n})$

(II) In S_1 und S_2 kommen also dieselben Variablen vor.
Nach Induktionsvoraussetzung gilt:

(III) $P(S_2)=P((S_{1k_1 \cdot k_n}^{c_1 \cdot c_n}))=(P(S_1)^{c_1 \cdot c_n}_{k_1 \cdot k_n})$

(IV) Deshalb kommen auch in $P(S_1)$ und $P(S_2)$ dieselben Variablen vor.
Wegen (II) und (IV) ist also
$\max\{i \in \mathbb{N} / x_i$ oder y_i kommt in S_1 oder $P(S_1)$ vor $\}=$
$\max\{i \in \mathbb{N} / x_i$ oder y_i kommt in S_2 oder $P(S_2)$ vor $\}$.
Sei m dieses Maximum und $w_i=x_{m+i}$.
Dann ist nach R1(A):

$P(Av_1 \cdot v_n(S_{2v_1 \cdot v_n}^{k_1 \cdot k_n})) = Aw_1 \cdot w_n(P(S_2)_{w_1 \cdot w_n}^{k_1 \cdot k_n})$ = wegen (I)

$Aw_1 \cdot w_n((P(S_1)_{k_1 \cdot k_n}^{c_1 \cdot c_n})_{w_1 \cdot w_n}^{k_1 \cdot k_n})$ = weil wegen der zweiten Gleichung von (I) $k_1,..,k_n$ in S_1 nicht vorkommen und nach Induktionsvoraussetzung also auch nicht in $P(S_1)$

$= Aw_1 \cdot w_n(P(S_1)_{w_1 \cdot w_n}^{c_1 \cdot c_n}) = P(Av_1 \cdot v_n(S_{1v_1 \cdot v_n}^{c_1 \cdot c_n}))$

Nach Induktionsvoaraussetzung kommen $c_1,..,c_n$ auch in $P(S_1)$ vor. Da die w_i in $P(S_1)$ nicht vorkommen, ist c_i in $P(S_1)$ durch w_i substituierbar und also $Aw_1 \cdot w_n(P(S_1)_{w_1 \cdot w_n}^{c_1 \cdot c_n})$ e SL.

Unter Induktionsvoraussetzung ist also $P(Av_1 \cdot v_n(S_{1v_1 \cdot v_n}^{c_1 \cdot c_n}))$ ein eindeutig bestimmter Satz von IL.

Für R2(A),R3(A),R1(E),R2(E),R3(E) ist der Beweis analog.

Für $S = P^m I^m$ mit P^me m-PL und I^me m-IL und $Name(I^m) \neq 0$ ist der Nachweis, daß unter Induktionsvoraussetzung P(S) eindeutig festgelegt ist, analog zum Induktionsschritt im Beweis von 4.10.
Für die Punkte 1) und 2) der Behauptung ist zu benutzen, daß wegen 3.3 und 3.5
c in $1kp(I^m)$ genau dann vorkommt, wenn c in I^m vorkommt

und daß $1kp(I^m{}_{k_1 \cdot k_n}^{c_1 \cdot c_n}) = (1kp(I^m)_{k_1 \cdot k_n}^{c_1 \cdot c_n})$

6.3 Def: Sei außer durch R(BS),R(BG),R(⊢),R(L),R(I^m),R(=)
P_1 definiert durch R1(-),R1(&),R3(v),R1(A),R3(E)
P_2 " R1(-),R2(&),R2(v),R2(A),R2(E)
P_3 " R2(-),R1(&),R1(v),R1(A),R1(E)
P_4 " R2(-),R2(&),R2(v),R2(A),R2(E)

6.4 Beh: P_1 und P_2 sind Präsuppositionsfunktionen,
P_3 und P_4 konservative Präsuppositionsfunktionen.

Bew: Wir zeigen für S_0e SL durch Induktion nach dem transfiniten Grad von S_0,daß für i=1,2 $P_i(S_0)$ L $P_i(P_i(S_0))$ und für i =3,4 S_0 L $P_i(S_0)$.

Für S_0e(BSoBG)ist die Behauptung klar .
Sei nun S_0e SL mit traGra(S_0) ≠(0,0) und (IV) gelte die Behauptung für alle Sätze von IL mit kleinerem transfinitem Grad als traGra(S).

1) Habe S_0 die Gestalt -S mit S e SL.
Nach (IV) gilt für i=1,2 $P_i(S)$ L $P_i(P_i(S))$.
Also gilt $P_i(-S)=P_i(S)$ L $P_i(P_i(S))=P_i(P_i(-S))$,für i=1,2.
Für i=3,4 ist die Behauptung klar,daß
-S L $P_i(S)=(P_i(S)v-S)$

2) Habe S_0 die Gestalt $(S_1\&..\&S_n)$.
Nach (IV) gilt für i=1,2,j=1,.,n $P_i(S_j)$ L $P_i(P_i(S_j))$
Also $P_1((S_1\&..\&S_n))=(P_1(S_1)\&..\&P_1(S_n))$ L$(P_1(P_1(S_1))\&.\&P_1(P_1(S_n)))$
$=P_1((P_1(S_1)\&..\&P_1(S_n)))=P_1(P_1((S_1\&..\&S_n)))$.

Um die Behauptung für P_2 zu zeigen,beachten wir,daß
(I) für $A_1,.,A_n$e SL mit A_iL $P_2(A_i)$
$(A_1\&..\&A_n)$ L $(P_2(A_1)\&..\&P_2(A_n))$ L $P_2((A_1\&..\&A_n))$
(II) für A e SL mit $P_2(A)$ L $P_2(P_2(A))$ gilt,daß
$(A\&P_2(A))$ L $(P_2(A)\&P_2(P_2(A)))$ L $P_2((A\&P_2(A)))$

Nach R2(&) und R2(v) hat nun $P_2(P_2((S_1\&..\&S_n))$ die Gestalt$(D_{-1}vD_0vD_1v..vD_n)$,wobei
$D_{-1}=(P_2((P_2(S_1)\&.\&P_2(S_n)))\&P_2((-S_1\&P_2(S_1)))\&..\&P_2((-S_n\&P_2(S_n))))$
$D_0=((P_2(S_1)\&.\&P_2(S_n))\&P_2((P_2(S_1)\&.\&P_2(S_n))))$
$D_i=((-S_i\&P_2(S_i))\&P_2((-S_i\&P_2(S_i))))$

Sei nun B eine Bewertung von SL mit $B(P_2((S_1\&..\&S_n))=w$
Falls $B((P_2(S_1)\&.\&P_2(S_n)))=w$,dann ist nach (IV) und (I)
mit $A_i=P_2(S_i)$ $B(P_2((P_2(S_1)\&.\&P_2(S_n))))=w=B(D_0)$

Falls andererseits für ein i $B((-S_i \& P(S_i))=w$,
dann ist nach (II) mit $A=-S_i$,da $P_2(-S_i)=P_2(S_i)$
auch $B(P_2((-S_i \& P_2(S_i))))=w = B(D_i)$.
Es ist also in jedem Falls $B(P_2(P_2((S_1 \& .. \& S_n))))=w$,
falls $B(P_2((S_1 \& .. \& S_n)))=w$.
Damit ist für P_2 die Behauptung gezeigt.
Nach (IV) gilt außerdem für i=3,4,und j=1,.,n,daß
$S_j L P_i(S_j)$. Dann ist klar ,daß
$(S_1 \& .. \& S_n)$ L $(P_3(S_1) \& .. \& P_3(S_n)) = P_3((S_1 \& .. \& S_n))$ und
$(S_1 \& .. \& S_n)$ L $(P_4(S_1) \& .. \& P_4(S_n))$ L $P_4((S_1 \& .. \& S_n))$

3) Habe S_0 die Gestalt $(S_1 v .. v S_n)$
Nach (IV) gilt für i=1,2 und j=1,.,n,daß $P_i(S_j)$ L $P_i(P_i(S_j))$
und für i=3,4 und j=1,.,n,daß $S_j L P_i(S_j)$.
Dann $P_1((S_1 v .. v S_n))=(P_1(S_1) \& .. \& P_1(S_n))$ L
$(P_1(P_1(S_1)) \& .. \& P_1(P_1(S_n))) = P_1(P_1((S_1 v .. v S_n))$.
Für P_2 ist der Beweis fast ganz wie für die Konjunktion.
Nach (IV) $(S_1 v .. v S_n)$ $L(P_3(S_1) v .. v P_3(S_n)) = P_3((S_1 v .. v S_n))$
und $(S_1 v . v S_n)$ $L((S_1 \& P_4(S_1)) v .. v (S_n \& P_4(S_n)))$ L
$P_4((S_1 v . v S_n))$

4) Für All-und Existenzsätze gelten wieder dieselben
Überlegungen wie für Konjunktion und Disjunktion.
Wir betrachten exemplarisch den Fall,daß
$S_0=Av_1 . v_n(S^{c_1 \cdot c_n}_{v_1 \cdot v_n})$ und überprüfen P_1.
Nach (IV) gilt für alle $(k_1,.,k_n) \in IK^n$,daß
$P_1((S^{c_1 \cdot c_n}_{k_1 \cdot k_n}))$ L $P_1(P_1((S^{c_1 \cdot c_n}_{k_1 \cdot k_n}))$.
Nach R1(A) hat $P_1(Av_1 . v_n(S^{c_1 \cdot c_n}_{k_1 \cdot k_n}))$ die Gestalt
$Aw_1 . w_n(P_1(S)^{c_1 \cdot c_n}_{w_1 \cdot w_n})$ und $P_1(P_1(Av_1 . v_n(S^{c_1 \cdot c_n}_{v_1 \cdot v_n}))$ die
Gestalt $Au_1 . u_n(P_1(P_1(S))^{c_1 \cdot c_n}_{u_1 \cdot u_n})$,wobei w_i, u_i e IV.
Falls nun B eine Bewertung von SL ist mit
$B(Aw_1 . w_n(P_1(S)^{c_1 \cdot c_n}_{w_1 \cdot w_n})=w$,dann für alle $(k_1,.,k_n) \in IK^n$
$B((P_1(S)^{c_1 \cdot c_n}_{k_1 \cdot k_n}))=w$ und nach 6.2,2) $B(P_1((S^{c_1 \cdot c_n}_{k_1 \cdot k_n})))=w$
und wegen (IV) dann $B(P_1(P_1((S^{c_1 \cdot c_n}_{k_1 \cdot k_n}))))=w$ = nach 6.2, 2)
$B(P_1((P_1(S)^{c_1 \cdot c_n}_{k_1 \cdot k_n})))= B((P_1(P_1(S))^{c_1 \cdot c_n}_{k_1 \cdot k_n}))$,also
$B(Au_1 . u_n(P_1(P_1(S))^{c_1 \cdot c_n}_{u_1 \cdot u_n}))=w$.

5) Habe S_o die Gestalt $Lv_1.v_n(S^{c_1}_{v_1}.^{c_n}_{v_n})k_1.k_n$ mit $k_1,..,k_n \in IK^n$. Dann ist nach R(L) $P(S_o)=P((S^{c_1}_{k_1}.^{c_n}_{k_n}))$ für $P=P_1,P_2,P_3,P_4$. Nach (IV) gilt die Behauptung für $(S^{c_1}_{k_1}.^{c_n}_{k_n})$ und so auch für S_o.

6) Habe S_o die Gestalt P^nI^n mit P^ne n-PL, I^ne n-IL, $Name(I^n)\neq 0$. Dann ist nach 3.4,2) $Name(kp(I^n))\not\perp Name(I^n)$, also $traGra(Ax_1.x_n(kp(I^n)x_1.x_n \leftarrow P^nx_1.x_n)\not\perp traGra(S_o)$, $traGra(kp(I^n)k_1.k_n)\not\perp traGra(S_o)$ für $k_1,..,k_n \in IK$ und für weitere $c_1,..,c_n \in IK$ $traGra((kp(I^n)c_1.c_n \leftarrow c_1.c_n=k_1.k_n))\not\perp traGra(S_o)$. Also gilt nach (IV) die Behauptung für $Ax_1.x_n(kp(I^n)x_1.x_n \leftarrow P^nx_1.x_n)$ (kurz: S_2) und für $kp(I^n)k_1.k_n$ und $(kp(I^n)c_1.c_n \leftarrow c_1.c_n=k_1.k_n)$ mit $c_1,..,c_n,k_1,..,k_n \in IK$.
In den vorangehenden Punkten wurde gezeigt, daß die Behauptung dann auch für $Ex_1.x_n 1kp(I^n)x_1.x_n$ (kurz: S_1) gilt. Also:
(I) für $P=P_1,P_2$: $P(S_1)\ L\ P(P(S_1)), P(S_2)\ L\ P(P(S_2))$ und
(II) für $P=P_3,P_4$: $S_1 L\ P(S_1)$, $S_2\ L\ P(S_2)$

Nun ist $P_1(S_o)=(S_1\&P_1(S_1)\&P_1(S_2))$ nach $R(I^m)$ und $P(P(S_o))=(P_1(S_1)\&P_1(P_1(S_1))\&P_1(P_1(S_2)))$ nach R1(&).
Wegen (I) dann: $P_1(S_o)\ L\ P_1(P_1(S_o))$
$P_2(S_o)=(S_1\&P_2(S_1)\&P_2(S_2))$ nach $R(I^m)$
$P_2(P_2(S_o))=(D_1 v..v D_4)$ mit $D_1=(P_2(S_1)\&P_2(P_2(S_1))\&P_2(P_2(S_2)))$ nach R2(&). Also wegen (I) $P_2(S_o)\ L\ D_1\ L\ P_2(P_2(S_o))$

Nach 4.3,7) gilt: $S_o L\ (S_1\&S_2)$
Wegen (II) gilt daher für $P=P_3,P_4$:
$S_o L\ (S_1\&P(S_1)\&P(S_2))=P(S_o)$.
Insgesamt gilt unter (IV) die Behauptung auch für S_o.

7) Der Induktionsschritt für S_o mit der Gestalt $I^n_1=I^n_2$, wobei $Name(I^n_1)\neq 0$ oder $Name(I^n_2)\neq 0$, ist wie in 6)

8) Für die Implikation folgt der Induktionsschritt aus den Punkten 1),3) und R($\leftarrow$)

Abschließend charakterisieren wir nochmals die wahrheitsfunktionalen Zusammenhänge,welche von den in 6.3 definierten Funktionen induziert werden.

6.5 Bem: Sei B eine Bewertung von SL

1) Für B_{P_1} gilt:

a)

S	-S
w	f
f	w
u	u

b)

S_1	S_2	$-S_1$	$(S_1 \& S_2)$	$(S_1 \vee S_2)$	$(S_1 \leftarrow S_2)$
w	w	f	w	w	w
w	f	f	f	w	f
w	u	f	u	u	u
f	w	w	f	w	w
f	f	w	f	f	w
f	u	w	u	u	u
u	w	u	u	u	u
u	f	u	u	u	u
u	u	u	u	u	u

c) Ein Allsatz ist genau dann wahr,wenn alle Konstanteneinsetzungen wahr sind,unbestimmt genau dann,wenn mindestens eine Konstanteneinsetzung unbestimmt ist.

Ein Existenzsatz ist wahr genau dann,wenn mindestens eine Konstanteneinsetzung wahr ist,ungestimmt gdw mindestens eine davon unbestimmt ist

2) Für B_{P_2} gilt:

a) wie in 1a)

b)

S_1	S_2	$-S_1$	$(S_1 \& S_2)$	$(S_1 \vee S_2)$	$(S_1 \leftarrow S_2)$
w	w	f	w	w	w
w	f	f	f	w	f
w	u	f	u	w	u
f	w	w	f	w	w
f	f	w	f	f	w
f	u	w	f	u	w
u	w	u	u	w	w
u	f	u	f	u	u
u	u	u	u	u	u

c) Ein Allsatz ist wahr gdw alle Konstanteneinsetzungen wahr sind,falsch gdw mindestens eine falsch ist

Ein Existenzsatz ist wahr gdw mindestens eine Konstantenseinsetzung wahr ist,falsch gdw alle falsch sind.

3) Für B_{P_3} gilt:

a)

S_1	S_2	$-S_1$	$(S_1 \& S_2)$	$(S_1 \vee S_2)$	$(S_1 \leftarrow S_2)$
w	w	f	w	w	w
w	f	f	f	w	f
w	u	f	u	w	f
f	w	w	f	w	w
f	f	w	f	f	w
f	u	w	u	f	w
u	w	w	u	w	w
u	f	w	u	f	w
u	u	w	u	u	w

b) Eine Allsatz ist wahr gdw alle Konstanteneinsetzungen wahr sind, unbestimmt gdw mind estens eine davon unbestimmt ist

Ein Existenzsatz ist wahr gdw mindestens eine Konstanteneinsetzung wahr ist, unbestimmt gdw alle unbestimmt sind.

4) Für B_{P_4} gilt:

a)

S_1	S_2	$-S_1$	$(S_1 \& S_2)$	$(S_1 \vee S_2)$	$(S_1 \leftarrow S_2)$
w	w	f	w	w	w
w	f	f	f	w	f
w	u	f	u	w	u
f	w	w	f	w	w
f	f	w	f	f	w
f	u	w	f	u	w
u	w	w	u	w	w
u	f	w	f	u	w
u	u	w	u	u	w

Bew : Die Behauptung folgt aus 6.1, 6.2 und 6.4.

Neben diesen wahrheitsfunktionalen Zusammenhängen steht uns bei semantischen Untersuchungen apriori das Korrespondenztheorem 5.4 und 5.9,3) zur Verfügung, welches Auskunft darüber gibt, in welchem Verhältnis die induzierten 3-wertigen Begriffe der logischen Wahrheit und Folgerung zu den 2-wertigen Begriffen stehen.

Außerdem erlaubt es, aus einem adäquaten 2-wertigen Kalkül für diese Begriffe unmittelbar einen adäquaten Kalkül für die induzierte 3-wertige Semantik zu gewinnen

7. SYNTAX UND SEMANTIK DER SPRACHE Π

7.1 Def: "Sl" bezeichne die Menge der Sätze von Π, in denen kein Gleichheitszeichen vorkommt und an logischen Zeichen höchstens -,& und A.

7.2 Def: $B \in \dashv(w,f)\vdash^{Sl}$ heißt eine Bewertung von Sl gdw

1) Für $S \in Sl$
$B(-S)=w$ gdw $B(S)=f$

2) Für $S_1,..,S_n \in Sl$ mit $2 \neq n$
$B((S_1\&..\&S_n))=w$ gdw für alle i $B(S_i)=w$

3) Für Se SL, jeweils paarverschiedene $c_1,..c_n \in IK$ und $v_1,..,v_n \in IV$ so, daß für alle i c_i in S durch v_i substituierbar ist,
$B(Av_1..v_n(S^{c_1..c_n}_{v_1..v_n}))=w$ gdw für alle $(k_1,..,k_n) \in IK^n$
$B((S^{c_1..c_n}_{k_1..k_n}))=w$

7.3 Bem: Sei $B_S \in \dashv(w,f)\vdash^{BS}$.
Dann gibt es genau eine Bewertung B von Sl derart, daß $B/BS=B_S$.

7.4 Def: Seien $S,S_1,S_2 \in Sl$

1) $\models S$ gdw für alle Bewertungen B von Sl $B(S)=w$

2) $S_1 \models S_2$ gdw für alle Bewertungen B von Sl mit $B(S_1)=w$ auch $B(S_2)=w$

3) $S_1 \doteq_1 S_2$ gdw $S_1 \models S_2$ und $S_2 \models S_1$

8.NEGATION UND KONSISTENZ VON SATZMENGEN

8.1 Def: Sei M c SL und MM c Pot(SL)
1) $-M \simeq \{-m / m \in M\}$
2) $-MM \simeq \{-M / M \in MM\}$

8.2 Bem: Sei M c SL und MM c Pot(SL)
1) $-M \subset SL$
2) $-MM \subset Pot(SL)$

8.3 Def: $BSN \simeq (BS \cup -BS)$

8.4 Bem: BSN enthält als Elemente genau alle Basissätze und alle Negationen von Basissätzen.

8.5 Def: Die Menge BSnN definieren wir rekursiv wie folgt:
1) BSN c BSnN
2) Ist S e BSnN, dann auch -S

8.6 Bem: BSnN enthält als Elemente sämtliche Basissätze und alle n-fachen Negationen von Basissätzen für alle $n \in \mathbb{N}$.

Jedem Element von BSnN kann man durch iterierte doppelte Negationsbeseitigung ein äquivalentes Element von BSN zuordnen.

8.7 Def: Sei die Funktion $\not\not$ von BSnN nach BSN rekursiv definiert wie folgt:
1) Für $S \in BSN$ sei $\not\not(S)=S$
2) Für alle $S \in BSnN$ sei
$\not\not(--S)=\not\not(S)$

$\not\not$ ist die Funktion der maximal iterierten doppelten Negationsbeseitigung für n-fach negierte Basissätze.

8.8 Def: Sei M c BSN
1) M heißt INKONSISTENT gdw es gibt ein $m \in M$ so, daß $-m \in M$.
2) M heißt KONSISTENT gdw M nicht inkonsistent ist

8.9 Bem: Ø ist konsistent,
BSN ist inkonsistent .

8.10 Beh: Seien $M, M_1, M_2 c$ BSN , m e BSN

1) M ist konsistent gdw es eine Bewertung B von Sl gibt so,daß $B(m)=w$ für alle m e M
2) M ist konsistent gdw es eine Bewertung B von Sl gibt so,daß $B(m)=f$ für alle m e M
3) Sei M konsistent.
a) Falls $\not\vdash(-m) \notin M$, ist $M \circ \{m\}$ konsistent
b) Falls $m \notin M$,ist $M \circ \{\not\vdash(-m)\}$ konsistent
4) Sei $M_1 c M_2$
Falls M_2 konsistent,dann auch M_1

Bew:

1) Es ist klar,daß,falls es eine Bewertung B von Sl gibt mit $B(m)=w$ für alle m e M,M konsistent sein muß.
Sei umgekehrt M konsistent.
Wir definieren $B_S e \{w,f\}^{BS}$ wie folgt:
Für SeBS sei $B_S(S)=w$ gdw S e M.
Nach7.3 gibt es eine Bewertung B von Sl so,daß (I) für S e BS $B(S)=w$ gdw S e M.
Wir behaupten: für alle m e M ist $B(m)=w$.
Denn sei m e M.
Falls m e BS ,ist $B(m)=w$ nach (I).
Falls $m \notin$ BS ,ist m e -BS und $\not\vdash(-m)$e BS.
$\not\vdash(-m) \notin M$,da M konsistent,deshalb $B(\not\vdash(-m))=f$,
also $B(m)=w$.
2) zeigt man dual zu 1).
B_S ist zu definieren durch:
$B_S(S)=f$ gdw S e M ,für alle S e BS.
3) Sei M konsistent
a) und $\not\vdash(-m) \notin M$.
Sei n eMo $\{m\}$.Wir behaupten $-n \notin$ o $\{m\}$.
Denn,falls n e M,ist $-n \notin M$,da M konsistent,und $-n \notin \{m\}$,da sonst $-n=m$ und $n=\not\vdash(--n)=\not\vdash(-m)$eM .
Und ,falls n e $\{m\}$,ist $-n \notin M$,da sonst m e BS und $-n=-m=\not\vdash(-m)$eM.
b) wie a)
4) ist klar

9.KONJUNKTIVE UND DISJUNKTIVE NORMALMENGEN

9.1 Def: Sei S e Sl, MMcPot(BSN)

1) MM heißt eine KONJUNKTIVE NORMALMENGE VON S gdw
für alle Bewertungen B von Sl gilt:
B(S)=w gdw für alle MeMM gibt es ein m eM mit B(m)=w

2) MM heißt eine DISJUNKTIVE NORMALMENGE VON S gdw
für alle Bewertungen B von Sl gilt:
B(S)=w gdw es gibt ein MeMM so,daß für alle m eM B(m)=w

9.2 Def: Sei S e Sl.
KNM(S) sei die Menge der konjunktiven und
DNM(S) die Menge der disjunktiven Normalmengen von S.

9.3 Beh: Sei Se Sl , b e BSN

1) Sei MM e KNM(S)

a) l S gdw alle M e MM sind inkonsistent

b) falls MM≠Ø und alle M e MM konsistent,gilt:
b l S gdw b e U(MM)

2) Sei MM e DNM(S)

a) l-S gdw alle M e MM inkonsistent

b) falls MM≠Ø und alle M e MM konsistent,gilt:
S l b gdw b e U(MM)

Bew:

1) Sei MMeKNM(S)

a) Falls alle M e MM inkonsistent,gibt es für alle
M e MM ein m e M mit B(m)=w, so daß nach 9.1
B(S)=w ,für beliebige Bewertungen B von Sl.
Falls also alle M e MM inkonsistent,dann l S.
Falls dagegen M e MM konsistent,gibt es nach
8.10,2) eine Bewertung B von Sl so,daß für kein
m e M B(m)=w.Nach 9.1 also B(S)=f.
Wenn daher nicht alle M e MM inkonsistent,gilt
nicht l S

b) Sei MM≠Ø und alle M e MM konsistent.
Sei b e U(MM) und B eine Bewertung von Sl mit B(b)=w.
Dann gibt es für alle M e MM ein m e M mit B(m)=w,
also nach 9.1 B(S)=w.
Falls also b e U(MM),dann b l S

Falls dagegen b ∉ U(MM), dann gibt es ein M e MM mit b ∉ M. Nach Voraussetzung ist M konsistent und nach 8.10,3b) ist m o ¬(¬¬(¬b))- konsistent. Nach 8.10,2) gibt es eine Bewertung B von Sl, die alle Elemente dieser Menge falsch macht, also alle m e M falsch und b wahr. Nach 9.1 ist B(S)=f. Also b ⊬ S, falls b ∉ U(MM).

2) zeigt man dual zu 1)

9.3,2) und 4) verleihen konjunktiven und disjunktiven Normalmengen mit ausschließlich konsistenten Elementen besonderes Interesse. Wir definieren daher:

9.4 Def: Sei die Funktion kon von Pot(Pot(BSN)) nach Pot(Pot(BSN)) definiert durch:
Für MM c Pot(BSN) sei
kon(MM) := ¬(M / M e MM und M konsistent)-

9.5 Beh: Sei S e Sl
1) Falls MMeKNM(S), dann auch kon(MM)eKNM(S)
2) Falls MMeDNM(S), dann auch kon(MM)eDNM(S)

Bew:
1) Sei MMeKNM(S) und B eine Bewertung von Sl.
B(S)=w gdw für alle M e MM gibt es ein m e M mit B(m)=w
gdw für alle M e kon(MM) gibt es ein m e M mit B(m)=w, denn für die inkonsistenten M e MM gibt es trivialerweise ein m e M mit B(m)=w.

2) Sei MMeDNM(S) und B eine Bewertung von Sl
B(S)=w gdw es gibt ein M e MM so, daß für alle m e M B(m)=w
gdw es gibt ein M e kon(MM) so, daß für alle m e M B(m)=w, denn für die inkonsistenten M e MM ist ausgeschlossen, daß B(m)=w für alle m e M.

9.6 Bem: Sei S e Sl, b e BSN
1) Sei MM e KNM(S)
a) l S gdw kon(MM)=∅
b) falls ⊬ S, gilt: b l S gdw b e U(kon(MM))
2) Sei MM e DNM(S)
a) l-S gdw kon(MM)=∅
b) falls ⊬-S, gilt: S l b gdw b e U(kon(MM))

Bew: Sei S e Sl und b e BSN

1) Sei MM e KNM(S)

a) folgt aus 9.3,1a)

b) Sei $\not\in$ S.

Nach 1) ist dann kon(MM)$\neq\emptyset$ und nach 9.5,1) ist kon(MM) e KNM(S).Die Behauptung folgt dann aus 9.3,1b)

2) analog zu 1)

Im folgenden wollen wir zeigen,daß für alle S e Sl KNM(S)$\neq\emptyset$ und DNM(S)$\neq\emptyset$,indem wir für S rekursiv eine konjunktive und eine disjunktive Normalmenge definieren. Zunächst benötigen wir Hilfsfunktionen.

9.7 Def: Seien die Funktionen k und d von Sl nach Pot(Pot(BSnN)) definiert durch:

1) Für S e BS sei
$k(S)=\neg(\neg(S))=d(S)$

2) Für S e Sl sei

a) $k(\neg S)=\neg d(S)$

b) $d(\neg S)=\neg k(S)$ siehe 8.1

3) Für $S_1,..,S_n$ e Sl mit $2\not=n$ sei

a) $k((S_1\&..\&S_n))=(k(S_1)o..ok(S_n))$

b) $d((S_1\&..\&S_n))=\neg$(M / es gibt $M_1,..,M_n$ mit M_ie $d(S_i)$ und $M=(M_1o..oM_n)$)

4) Für S e Sl,jeweils paarverschiedene $c_1,..,c_n$eIK und $v_1,..,v_n$eIV derart,daß für alle i c_i in S durch v_i substituierbar ist,sei

a) $k(Av_1.v_n(S^{c_1\cdot c_n}_{v_1\cdot v_n}))=$ O$\neg$($k((S^{c_1\cdot c_n}_{k_1\cdot k_n}))$ / $(k_1,..,k_n)$eIK^n)

b) $d(Av_1.v_n(S^{c_1\cdot c_n}_{v_1\cdot v_n}))=\neg$(M / es gibt eine Funktion F mit Def(F)=IK^n,$F((k_1,..k_n))$e $d((S^{c_1\cdot c_n}_{k_1\cdot k_n}))$,M= O Bi(F))

4) ist eine eindeutige Definitionsvorschrift,weil für S_1,S_2 e SL,$c_1,..,c_n,h_1,..,h_n$eIK ,$v_1,..,v_n$eIV,wobei die c_i,h_i,v_i jeweils paarverschieden sind und für alle i c_i in S_1 und h_i in S_2 durch v_i substituierbar ist, falls $Av_1.v_n(S_1{}^{c_1\cdot c_n}_{v_1\cdot v_n})=Av_1.v_n(S_2{}^{h_1\cdot h_n}_{v_1\cdot v_n})$, $(S_1{}^{c_1\cdot c_n}_{v_1\cdot v_n})=(S_2{}^{h_1\cdot h_n}_{v_1\cdot v_n})$ und nach 2.12 dann für $(k_1,..,k_n)$eIK^n $(S_1{}^{c_1\cdot c_n}_{k_1\cdot k_n})=(S_2{}^{h_1\cdot h_n}_{k_1\cdot k_n})$.

Daß für alle SeSl k(S),d(S) c Pot(BSnN), zeigt man durch eine einfache Induktion nach dem Grad von S.

9.8 Beh: Sei S e Sl und B eine Bewertung von Sl.
Wir behaupten:

1) B(S)=w gdw für alle M e k(S) gibt es ein m e M mit B(m)=w

2) B(S)=w gdw es gibt ein M e d(S) so,daß für alle m e M B(m)=w

Bew: durch Induktion nach dem Grad von S
Für Basissätze ist die Behauptung klar.
Sei nun S e Sl mit o ≠Grad(S) und gelte die Behauptung für alle Sätze aus Sl mit kleinerem Grad als Grad(S).

Falls also S die Gestalt $-S_o$ hat mit S_o e Sl, gilt die Behauptung insbesondere für S_o.Und es ist:

1) B(S)=w gdw $B(S_o)$=f gdw für alle M e $d(S_o)$ gibt es ein m e M mit B(m)=f
gdw für alle N e $-d(S_o)$=k(S) gibt es ein n e N mit B(n)=w

2) B(S)=w gdw $B(S_o)$=f gdw es gibt ein M e $k(S_o)$ so,daß für alle m e M B(m)=f
gdw es gibt ein N e $-k(S_o)$=d(S) so,daß für alle n e N B(n)=w

Falls S die Gestalt $(S_1\&..\&S_n)$ hat mit S_ie Sl und 2 ≠n gilt die Behauptung für alle S_i.Und es ist

1) $B((S_1\&..\&S_n))$=w gdw für alle i $B(S_i)$=w gdw für alle i gibt es für alle M e $k(S_i)$ ein m e M mit B(m)=w gdw
für alle M e $(k(S_1)o..ok(S_n))$=$k((S_1\&..\&S_n))$ gibt es ein m e M mit B(m)=w.

2) $B((S_1\&..\&S_n))$=w gdw für alle i $B(S_i)$=w gdw für alle i gibt es ein M_ie $d(S_i)$ so,daß für alle m e M_iB(m)=w gdw
es gibt ein M_1e $d(S_1)$und..und ein M_ne $d(S_n)$ so,daß für alle m e$(M_1o..oM_n)$ B(m)=w gdw
es gibt ein Me $d((S_1\&..\&S_n))$ so,daß für alle m e M B(m)=w

Habe S die Gestalt $Av_1.v_n(S_{ov_1^{c_1}\cdot v_n^{c_n}})$ mit S_oe Sl und den üblichen Voraussetzungen.
Dann gilt die Behauptung für alle $(S_{ok_1^{c_1}\cdot k_n^{c_n}})$ mit $(k_1,.,k_n)eIK^n$.
Teil 1) der Behauptung zeigt man wie für die Konjunktion.

2) Sei $B(Av_1.v_n(S_{ov_1^{c_1}\cdot v_n^{c_n}}))=w$.
Dann für alle $(k_1,.,k_n)eIK^n$ $B((S_{ok_1^{c_1}\cdot k_n^{c_n}}))=w$.
Dann gibt es nach Indvor. für alle $(k_1,.,k_n)eIK^n$ ein $M_{k_1,.,k_n}$ e $d((S_{k_1^{c_1}\cdot k_n^{c_n}}))$ so,daß (I) für alle m e $M_{k_1,.,k_n}$ $B(m)=w$.

Gelte für die Funktion F mit $Def(F)=IK^n$,daß $K((k_1,.,k_n))=M_{k_1,.,k_n}$.
Sei nun m e O Bi(F).
Dann gibt es ein $(k_1,.,k_n)eIK^n$ so,daß m e $F((k_1,.,k_n))=M_{k_1,.,k_n}$.Nach (I) ist $B(m)=w$.
Also ist für alle m e O Bi(F) $B(m)=w$.
Es gibt also ein M e $d(Av_1.v_n(S_{ov_1^{c_1}\cdot v_n^{c_n}}))$ so,daß für alle m e M $B(m)=w$,falls $B(Av_1.v_n(S_{ov_1^{c_1}\cdot v_n^{c_n}}))=w$.
Falls umgekehrt $B(Av_1..v_n(S_{ov_1^{c_1}\cdot v_n^{c_n}}))=f$,dann gibt es ein $(K_1,.,K_n)eIK^n$ so,daß $B((S_{oK_1^{c_1}\cdot K_n^{c_n}}))=f$.
Nach Indvor. gibt es für alle M e $d((S_{oK_1^{c_1}\cdot K_n^{c_n}}))$ ein m e M mit $B(m)=f$.
Falls daher F eine Funktion ist mit $Def(F)=IK^n$ und $F((k_1,.,k_n))$e $d((S_{ok_1^{c_1}\cdot k_n^{c_n}}))$ für alle $(k_1,.,k_n)eIK^n$, gibt es ein m e $F((K_1,.,K_n))$ mit $B(m)=f$,also ein m e O Bi(F) mit $B(m)=f$.
Für alle M e $d(Av_1.v_n(S_{ov_1^{c_1}\cdot v_n^{c_n}}))$ gibt es also ein m e M mit $B(m)=f$,falls $B(Av_1.v_n(S_{ov_1^{c_1}\cdot v_n^{c_n}}))=f$.
Insgesamt ist $B(S)=w$ gdw es gibt ein Me d(S) so,daß für alle m e M $B(m)=w$

9.9 Def: Sei S e Sl.Dann sei

1) $K(S) \simeq \dashv(\not\vdash : M/M \text{ e } k(S)) \vdash$
2) $D(S) \simeq \dashv(\not\vdash : M/M \text{ e } d(S)) \vdash$

siehe 0.19

9.10 Beh: Sei S e Sl.Dann ist

1) K(S) e KNM(S)
2) D(S) e DNM(S)

Bew: Sei S e Sl.
Dann sind k(S),d(S) c Pot(BSnN),deshalb
K(S),D(S) c Pot(BSN).
Daraus und aus 9.8 folgt die Behauptung.

9.11 Bem: Sei S e Sl.Dann ist

1) $K(S) \neq \emptyset$
2) $D(S) \neq \emptyset$

Bew: Durch eine einfache Induktion nach dem Grad von S zeigt man,daß $k(S) \neq 0$ und $d(S) \neq \emptyset$.
Daraus folgt mit Definition 9.9 die Behauptung.

9.12 Bem: Rekursionseigenschaften von K und D.

1) Seien $S_1,..,S_n \text{e} Sl$ mit $2 \not= n$
a) $K((S_1\&..\&S_n)) = K(S_1) \circ .. \circ K(S_n)$
b) $D((S_1\&..\&S_n)) = \dashv(M/M=M_1 \circ .. \circ M_n \text{ mit } M_i \text{e } D(S_i)) \vdash$

2) Sei S e Sl, $c_1,..,c_n \text{eIK}, v_1,..,v_n \text{eIV}$ paarverschieden, c_i in S durch v_i substituierbar.

a) $K(Av_1..v_n(S^{c_1\cdot c_n}_{v_1\cdot v_n})) = 0 \dashv(K((S^{c_1\cdot c_n}_{k_1\cdot k_n}))/(k_1,..,k_n) \text{eIK}^n) \vdash$

b) $D(Av_1..v_n(S^{c_1\cdot c_n}_{v_1\cdot v_n})) = \dashv(M$ /es gibt eine Funktion F mit
$Def(F)=IK^n$, $F((k_1,..k_n)) \text{eD}((S^{c_1\cdot c_n}_{k_1\cdot k_n}))$ und $M=OBi(F)) \vdash$

Bew: aus 9.7 und 9.9

10.ELEMENTWEISE KONSISTENTE SÄTZE

10.1 Def: Sei S e Sl.
S heißt ELEMENTWEISE KONSISTENT gdw
alle M e K(S) und alle M e D(S) konsistent sind.

10.2 Bem: Sei S e Sl.
Falls S elementweise konsistent ist (kurz: elkon),
ist S kontingent,dh $\not\vdash$ S und $\not\vdash$-S.

Bew: Sei S e Sl elkon.
Dann sind alle M e K(S) konsistent und alle
M e D(S) konsistent.
Angenommen,es wäre $\vdash$ S oder $\vdash$-S,dann wären nach
9.3,1a) bzw 9.3,2a) gleichzeitig alle M e K(S)
oder alle M e D(S) inkonsistent. Dann aber wäre
K(S)=Ø oder D(S)=Ø.Dies ist aber nach 9.11 nicht
möglich.

Daß die Umkehrung dieses Satzes nicht gilt,zeigt:

10.3 Beh: Rekursionseigenschaften der elementweisen Konsistenz

1) Basissätze sind elkon
2) Sei S e Sl.
Falls -S elkon,dann auch S
3) Seien $S_1,..,S_n$e Sl.mit $2 \neq n$
Falls $(S_1\&..\&S_n)$ elkon,dann sind alle S_i elkon
4) Sei S e Sl,$c_1,..,c_n$eIK ,$v_1,..,v_n$eIV jeweils paarverschieden. c_i sei in S durch v_i substituierbar.
Falls $Av_1..v_n(S^{c_1 \cdot c_n}_{v_1 \cdot v_n})$ elkon,dann ist für alle
$(k_1,..,k_n)$eIK^n $(S^{c_1 \cdot c_n}_{k_1 \cdot k_n})$ elkon.

Bew:

1) ist klar
2) Sei S e Sl
Falls S nicht elkon,gibt es ein M e K(S)oD(S) mit
M inkonsistent,also ein m e M mit -m e M.Da McBSN
ist m e BS.
Sei etwa M e K(S).Dann gibt es ein Ne k(S) mit
M=$\#\#$:N und n_1,n_2eN so,daß $\#\#(n_1)$=m und $\#\#(n_2)$=-m.
Nach 9.7,2) ist -N e d(-S) und es sind $-n_1,-n_2$e-N.
$\#\#$:-N e D(-S) und $\#\#(-n_1)$=-m e $\#\#$:-N und
$\#\#(-n_2)$=m e $\#\#$:-N.Also ist -S nicht elkon.
Dasselbe gilt,wenn M e D(S).

3) Seien $S_1,..,S_n$ e Sl mit $2 \neq n$.
Sei ein S_i nicht elkon.
Dann gibt es ein M_i e $K(S_i) o D(S_i)$ mit M_i inkonsistent.
Falls M_i e $K(S_i)$,dann M_i e $K((S_1\&..\&S_n))$ nach 9.12,1)
und $(S_1\&..\&S_n)$ nicht elkon.
Falls M_i e $D(S_i)$,ist es nach 9.11,2) möglich,für alle
$j \neq i$ ein M_j e $D(S_j)$ zu wählen.
Da M_i inkonsistent,ist auch $M_1 o..o M_n$ inkonsistent.
Nun ist $(M_1 o..o M_n)$ e $D((S_1\&..\&S_n))$,also ist
$(S_1\&..\&S_n)$ nicht elkon.

4) Für den Allsatz ist der Beweis wie für die Konjunktion.

Kontingente Sätze haben allgemein nur die in 10.3 1) und 2) dargestellten Rekursionseigenschaften.

10.3 Beh: Sei S e Sl elkon.

1) $U(K(S)) = \dashv(b \text{ e } BSN / b \text{ l } S)\vdash$

2) $U(D(S)) = \dashv(b \text{ e } BSN / S \text{ l } b)\vdash$

Bew: Falls S elkon,ist S nach 10.2) kontingent.

1) Außerdem ist $kon(K(S)) = K(S)$.
Die Behauptung folgt aus 9.6,1b)

2) $kon(D(S)) = D(S)$
Die Behauptung folgt aus 9.6,2b)

10.4 Beh: Seien $S_1,..,S_n$ e Sl mit $2 \neq n$.
$U(D((S_1\&..\&S_n))) = U(D(S_1)) o..o U(D(S_n))$

Bew: Nach 9.11,2) ist für alle S e Sl $D(S) \neq \emptyset$.
Deshalb ist nach 0.9 für alle S e Sl $U(D(S))$
definiert.Sei b e $U(D(S_1)) o..o U(D(S_n))$.Dann ist
für ein i b e $U(D(S_i))$.Dann ist auch für alle
$M_1,..,M_n$ mit M_j e $D(S_j)$ b e M_i,also auch b e $M_1 o..o M_n$.
Nach 9.12,1b) dann b e $U(D((S_1\&..\&S_n)))$.
Falls dagegen $b \notin U(D(S_1)) o..o U(D(S_n))$,dann gibt
es für alle i ein M_i e $D(S_i)$ so,daß $b \notin M_i$.
Also auch $b \notin (M_1 o..o M_n)$ und $b \notin U(D((S_1\&..\&S_n)))$

10.5 Beh: Seien $S_1,..,S_n$ e Sl mit $2 \neq n$ und $(S_1\&..\&S_n)$ elkon.
Sei b e BSN.Es gilt:
$(S_1\&..\&S_n)$ l b gdw für mind ein i S_i l b

Bew: Die Behauptung folgt aus 10.3,2) und 10.4)

Die Kontingenz der Konjunktion würde als Voraussetzung nicht ausreichen.

11.TEILGEHALTE

Zunächst definieren wir eine Relation zwischen möglichen konjunktiven und disjunktiven Normalmengen.

11.1 Def: Seien $MM_1, MM_2 c$ Pot(BSN)
MM_1 heißt eine AUSWAHL VON MM_2, in Zeichen $MM_1 A\ MM_2$, gdw
1) Für alle $M_1 e\ MM_1$ gibt es ein $M_2 e\ MM_2$ mit $M_1 c M_2$ und
2) Für alle $M_2 e\ MM_2$ gibt es ein $M_1 e\ MM_1$ mit $M_1 c M_2$

Wenn $MM_1 A\ MM_2$, dann sind nach 1) alle Elemente von MM_1 (durch Auswahl entstandene) Teilmengen von Elementen von MM_2.
Nach 2) wird für jedes Element von MM_2 eine Auswahl getroffen.

11.2 Bem: Seien MM, MM_1, MM_2, MM_3 c Pot(BSN)
1) MM A MM
2) Falls $MM_1 A\ MM_2$ und $MM_2 A\ MM_3$, dann $MM_1 A\ MM_3$

Bew: Die Reflexivität und Transitivität von "A" folgt aus den entsprechenden Eigenschaften der Relation "c".

Mithilfe von 11.1 können wir nun eine Relation zwischen Sätzen aus Sl definieren.

11.3 Def: Seien $S_1, S_2 e$ Sl.
S_1 ist ein TEILGEHALT VON S_2, in Zeichen $S_1 T\ S_2$, gdw
für alle $MM_2 e\ DNM(S_2)$ gibt es ein $MM_1 e DNM(S_1)$ so, daß $MM_1 A\ MM_2$.

11.4 Beh: Seien $S, S_1, S_2, S_3 e$ Sl
1) S T S
2) Falls $S_1 T\ S_2$ und $S_2 T\ S_3$, dann $S_1 T\ S_3$
3) Falls $S_1 T\ S_2$, dann $S_2 l\ S_1$
4) Falls $S_1 T\ S_2$ und $S_2 T\ S_1$, dann $S_1 \div_1 S_2$

Bew:
1) folgt aus 11.2,1)
2) aus 11.2,2)
3) Sei $S_1 T\ S_2$ und B eine Bewertung von Sl mit $B(S_2)=w$. Dann gibt es nach 9.10,2) ein $M_2 e\ D(S_2)$ so, daß für alle $m e M_2$ $B(m)=w$. Da $S_1 T\ S_2$, gibt es ein $MM_1 e DNM(S_1)$ mit $MM_1 A\ D(S_2)$, also insbesondere ein $M_1 e MM_1$ mit $M_1 c M_2$. Dann ist für alle $m e M_1$ ebenfalls $B(m)=w$ und, da $MM_1 e DNM(S_1)$ $B(S_1)=w$.
4) folgt aus 3)

Wir haben gezeigt,daß,wie es sein soll,S_1 aus S_2 logisch folgt,falls S_1 Teilgehalt von S_2 ist.
Jetzt werden wir zeigen,daß die Umkehrung davon nicht allgemein gilt.
Seien p,q e BS verschieden.
Dann gilt: p 1 (pvq) ,aber nicht (pvq) T p.

Zunächst zeigen wir ,daß es für alle MMeDNM(pvq) ein M e MM gibt so,daß q e M,und nehmen dazu das Gegenteil an. Sei
(I) MM e DNM(pvq) und gelte
(II) für alle M e MM q ∉ M
Nach 9.5 ist dann auch (III) kon(MM)e DNM(pvq) und (IV) kon(MM)≠∅, nach 9.6,2a),da pvq kontingent.
Da nicht (pvq) 1 p ist nach 9.6,2b) p ∉ U kon(MM).
Daher gibt es ein M e kon(MM) so,daß p ∉ M.
Wegen (II) ist auch q ∉ M.
Nach 8.10,3b) ist dann auch Mo ⊣(-p,-q)⊢ konsistent und nach 8.10,1) gibt es eine Bewertung B von Sl ,die alle Elemente dieser Menge wahr macht und also p und q und damit (pvq) falsch.
Im Widerspruch dazu müßte nach (III) B(pvq)=w sein,
da kon(MM) e DNM(pvq) und M e kon(MM) und für alle m e M
B(m)=w
Es gibt also für alle MM e DNM(S) ein M e MM so,daß q e M.

Für p nun wählen wir ⊣(⊣(p)⊢)⊢ als disjunktive Normalmenge.
Nun gibt es kein MM e DNM(pvq) derart,daß MM A ⊣(⊣(p)⊢)⊢.
Denn falls MM e DNM(pvq),gibt es ein M e MM mit q e M.
Da p≠q,ist M ∉ ⊣(p)⊢,also MM ⊭ ⊣(⊣(p)⊢)⊢.
Deshalb ist (pvq) kein Teilgehalt von p.

Literatur:

Blau,U.: Dreiwertige Logik,Berlin 1978

Hilbert,D.und W. Ackermann: Grundzüge der theoretischen Logik,Berlin,Heidelberg,New York ^{5}1967

Lebenslauf

24.9.1954	Geburt in Eggenfelden als Sohn von Hermann und Hildegard Kugler
1960-64	Besuch der Grundschule in Eggenfelden
1964-67	Besuch des humanistischen Gymnasiums der Benediktinerabtei Schweiklberg
1967-73	Besuch des Gymnasiums Pfarrkirchen
1973	Abitur in Pfarrkirchen
WS 73/74	Studium der Physik und Philosophie an der Universität Regensburg
1974-79	Studium der Logik und Wissenschaftstheorie an der Ludwig-Maximilians-Universität in München mit den Nebenfächern Mathematik und Linguistik
1979	Eheschließung mit Danuta Sobiechowska